

# Courbes rationnelles sur les variétés homogènes et une désingularisation plus fine des variétés de Schubert

Nicolas PERRIN  
Université de Versailles St-Quentin  
45 Avenue des Etats-Unis  
78045 Versailles cedex  
email : nperrin@fermat.uvsq.fr

## Introduction

Dans la première partie de cet article, on étudie le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses tracées sur une variété homogène. Soient  $G$  un groupe algébrique simple et simplement connexe sur  $\mathbf{C}$ ,  $P$  un parabolique de  $G$  et  $\alpha \in A_1(G/P)$  une classe d'équivalence rationnelle de 1-cycle. On suppose  $\alpha$  positive (c'est à dire coupant positivement les classes de diviseurs effectifs de  $G/P$ ), alors J.F. Thomsen [T], B. Kim et R. Pandharipande [KP] ont montré (en particulier) que le schéma de Hilbert des courbes lisses rationnelles de classe  $\alpha$  tracées sur  $G/P$  est lisse connexe mais pas nécessairement non vide. Dans cette partie, nous construisons de manière effective des courbes lisses sur les variétés homogènes. Nous retrouvons ainsi le résultat de J.F. Thomsen, B. Kim et R. Pandharipande par une méthode complètement différente et montrons l'existence de courbes lisses.

**Théorème 1 :** (i) *Le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses tracées sur  $G/P$  de classe  $\alpha$  positive est irréductible et lisse.*

(ii) *Si  $\alpha$  est strictement positive (c'est à dire d'intersection strictement positive avec tous les diviseurs effectifs de  $G/P$ ), alors il existe une courbe rationnelle lisse de classe  $\alpha$  sur  $G/P$  sauf pour  $\mathbf{P}^1$ ,  $\mathbf{P}^2$  et  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ .*

On donnera également les cas pour lesquels le schéma de Hilbert des courbes lisses est non vide lorsque  $\alpha$  est positive non strictement positive.

Pour démontrer ce théorème on étudie les orbites de  $G/P$  sous un parabolique  $P'$ . Ces orbites que nous appellerons  $P'$ -orbites généralisent les cellules de Schubert classiques (définies par l'action d'un Borel). Elles n'apparaissent pas de façon systématique dans la littérature. Seuls quelques cas particuliers sont décrits par exemple dans [BGG], [K1], [K2], [T] et [LMS]. Les méthodes de J.F. Thomsen [T] et B. Kim et R. Pandharipande [KP] pour prouver la première partie du théorème 1 sont totalement différentes de la notre. Ils montrent que le schéma des applications stables est connexe en reliant toute application à une application du bord par action d'un Borel ou d'un tore maximal, puis irréductible par lissité. La méthode présentée ici est plus directe (pas d'étude du bord du schéma des applications stables) et elle permet de montrer l'existence de morphismes non constants de  $\mathbf{P}^1$  dans  $G/P$  de classe  $\alpha$  positive et même de courbes lisses ce qui n'était pas le cas des méthodes de [T] et [KP]. Pour les courbes de genre  $g > 0$ , on n'a pour le moment que des résultats partiels. Citons E. Ballico [B] qui a montré l'irréductibilité du schéma de Hilbert des courbes de degré  $d$  et de genre  $g$  tracées sur une quadrique de  $\mathbf{P}^n$  pour  $n \geq 7$  et  $d \geq 2g - 1$ . Notre méthode permet de montrer, dans le cas où  $G$  est  $SL_n$  ou  $SO_{2n}$  et si  $P$  est un parabolique maximal, que le schéma des morphismes de degré  $d$  d'une courbe de genre  $g$  vers  $G/P$  est irréductible dès que  $d$  est grand devant  $g$  (on en déduit le résultat pour le schéma de Hilbert associé). On peut également montrer ce résultat si  $G$  est  $Sp_{2n}$  et si  $P$  est un parabolique maximal qui ne correspond pas aux sous espaces totalement isotropes maximaux. Enfin, la méthode de E. Ballico se généralise aux quadriques lisses de rang  $n$  pour  $3 \leq n \leq 7$ . Dans tous ces cas excepté pour  $\mathbf{P}^2$  et  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ , on sait également montrer l'existence de courbes lisses.

De plus, les  $P'$ -orbite que l'on introduit dans cette construction nous permettent, dans la seconde partie de cet article, de donner une désingularisation  $\pi$  des variétés de Schubert *plus fine* que celle de M. Demazure [D]. En effet, elle sera bijective sur un plus grand ouvert et une désingularisation de Demazure se factorise par celle-ci. Cependant, je ne sais pas si elle est *la plus fine possible* c'est à dire si elle est bijective sur le lieu lisse des variétés de Schubert. On peut néanmoins vérifier que c'est le cas pour les groupes de petite dimension ( $SL_4$  par exemple). On montre ainsi le résultat suivant :

**Théorème 2 :** (i) *Une désingularisation de Demazure se factorise par  $\pi$ .*

(ii) *Le morphisme  $\pi$  est une désingularisation des variétés de Schubert.*

On donnera aussi une condition suffisante (non nécessaire) de lissité des variétés de Schubert et un critère pour qu'une variété de Schubert soit homogène sous l'action d'un sous groupe de  $G$ .

## CONSTRUCTION DE COURBES LISSES SUR LES VARIÉTÉS HOMOGÈNES

On adoptera tout au long de cet article les notations de W. Fulton et J. Harris [FH] pour tout ce qui concerne les groupes, leurs algèbres de Lie et leurs systèmes de racines. Soit  $G$  un groupe de Lie simple et simplement connexe et soit  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Soit  $\mathfrak{h}$  une algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{b}$  un borel de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{h}$ . On note  $R$ , respectivement  $R^+$  et  $R^-$  l'ensemble des racines, respectivement l'ensemble des racines positives et négatives. On a les décompositions de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{b}$  suivant les poids :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha$$

Le Groupe de Picard de  $G/B$  est exactement le réseau des poids de  $\mathfrak{h}^*$ . Dans le groupe de Picard de  $G/B$ , le cône formé par les poids  $x$  tels que :  $(x, \alpha) \geq 0$  pour toute racine simple  $\alpha$  (c'est la chambre de Weyl principale) est engendré par les poids fondamentaux (diviseurs engendrant le groupe de Picard des  $G/P$  où  $P$  est un parabolique maximal). On l'appelle cône ample de  $\text{Pic}(G/B)$ . Le groupe  $A_1(G/B)$  est le dual de  $\text{Pic}(G/B)$ . C'est donc le réseau des racines dans  $\mathfrak{h}$ . Le cône ample de  $\text{Pic}(G/B)$  définit par dualité le cône positif de  $A_1(G/B)$ . Ce cône est le cône engendré par les racines simples. On appelle cône strictement positif les éléments qui sont strictement positifs sur toutes les arêtes du cône ample du groupe de Picard, c'est le cône positif privé de ses faces de codimension 1.

Un sous groupe parabolique  $P$  de  $G$  contenant  $B$  est donné par un ensemble de racines simples négatives  $\Sigma$  et l'algèbre correspondante est alors :

$$\mathfrak{p}(\Sigma) = \mathfrak{b} \oplus_{\alpha \in T(\Sigma)} \mathfrak{g}_\alpha$$

où  $T(\Sigma)$  est l'ensemble des racines obtenues comme somme de racines simples en dehors de  $\Sigma$ . Le groupe de Picard de  $G/P(\Sigma)$  est donné par le sous réseau des poids (c'est à dire le sous réseau de  $\mathfrak{h}^*$ ) défini par les équations  $(x, \alpha) = 0$  pour toute les racines simples  $\alpha$  en dehors de  $\Sigma$ . On peut aussi le décrire comme le réseau engendré par les coracines  $\tilde{\alpha}$  des racines simples  $\alpha \in \Sigma$ . On peut ainsi définir par restriction un cône ample dans  $\text{Pic}(G/P)$ . Par dualité on peut définir des cônes positif et strictement positif dans  $A_1(G/P)$  qui sont les quotients des cônes de  $A_1(G/B)$ .

**Remarque 1 :** Si  $C$  est une courbe irréductible dans  $G/P$  alors sa classe  $[C]$  dans  $A_1(G/P)$  est nécessairement dans le cône positif car tous les diviseurs  $D$  qui forment une arête du cône ample de  $\text{Pic}(G/P)$  sont effectifs et par l'action du groupe on voit que  $(C, D) \geq 0$  (voir par exemple [Kl]). Ainsi  $[C]$  est toujours dans le cône positif et la condition de la première partie du théorème 1 est une condition nécessaire pour que le schéma de Hilbert soit non vide.

## 1 Les courbes rationnelles et leur schéma de Hilbert

On note  $\mathbf{Hilb}(\alpha, X)$  le schéma de Hilbert des courbes rationnelles lisses dans  $X$  dont dans la classe dans  $A_1(X)$  est  $\alpha$ .

**Proposition 1 :** Soit  $\alpha \in A_1(G/P)$  dans le cône positif, alors  $\mathbf{Hilb}(\alpha, G/P)$  est lisse de dimension :

$$\sum_{\alpha' \in \Sigma} (\tilde{\alpha}', \alpha) + \dim(G/P) - 3$$

*Démonstration :* Il suffit de montrer que  $T_{G/P}$  est engendré par ses sections pour avoir la lissité du schéma de Hilbert. Sa dimension au point  $C$  est alors donnée par  $\deg(T_{G/P}|_C) + \dim(G/P) - 3$  c'est ce qu'on cherche car le degré de  $T_{G/P}|_C$  est  $\sum_{\alpha' \in \Sigma} (\tilde{\alpha}', \alpha)$ .

Si on a une action linéaire de  $P$  sur un espace vectoriel  $N$ , alors  $P$  agit sur le produit  $G \times N$  par  $(p, (g, n)) \mapsto (gp^{-1}, pn)$ . Le quotient  $G \times^P N$  est un fibré vectoriel au dessus de  $G/P$ . Ainsi, le faisceau  $T_{G/P}$  est le fibré vectoriel associé à la représentation de  $P$  suivante :  $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ . Mais  $G$  agit sur  $\mathfrak{g}$  donc le fibré vectoriel  $\mathcal{G}$  associé à  $\mathfrak{g}$  est trivial. Comme quotient du fibré trivial  $\mathcal{G}$ , le faisceau  $T_{G/P}$  est engendré par ses sections. Pour une autre démonstration voir [Ko] théorème 1.4 page 241.

La difficulté de la première partie du théorème 1 réside donc dans l'irréductibilité du schéma de Hilbert. Pour l'étudier, on va s'intéresser au schéma des morphismes  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, G/P)$  qui paramétrise les morphismes  $f$  de schémas de  $\mathbf{P}^1$  dans  $G/P$  tels que la classe de  $f(\mathbf{P}^1)$  dans  $A_1(G/P)$  est  $\alpha$ . L'ensemble des plongements de  $\mathbf{P}^1$  dans  $G/P$  de classe  $\alpha$  est un ouvert de ce schéma. Cet ouvert domine  $\mathbf{Hilb}(\alpha, G/P)$  (c'est une fibration en  $SL_2$ ) et l'irréductibilité du schéma de Hilbert se déduira de celle de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, G/P)$ . La proposition suivante nous permet de ramener ce problème à celui d'un ouvert :

**Proposition 2** : Soit  $X$  une variété munie d'une action transitive d'un groupe  $G$  et soit  $\alpha \in A_1(X)$ . Supposons qu'il existe un ouvert  $U$  de  $X$  dont le complémentaire  $Z$  est de codimension supérieure ou égale à 2 et tel que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, U)$  est irréductible, alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  l'est aussi.

*Démonstration* : Les ouverts  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g.U)$  de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  recouvrent  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$ . On utilise pour cela un résultat de Kleiman [Kl] : si  $C$  est une courbe de  $X$  et si  $Z$  est un fermé de codimension au moins 2, alors il existe un ouvert de  $G$  tel que, pour tout point  $g$  de cet ouvert, l'intersection de  $C$  avec les translatés  $g.Z$  du fermé  $Z$  est vide. Donc si on a un point  $f$  dans  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  et  $C$  son image, alors il existe un ouvert de  $G$  tel que  $C$  est contenue dans  $g.U$  et donc  $f$  est dans  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g.U)$  pour tout  $g$  dans cet ouvert. Ceci impose l'irréductibilité. En effet, deux ouverts  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g.U)$  et  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g'.U)$  se coupent toujours : il suffit d'exhiber une courbe qui ne rencontre pas  $g.Z \cup g'.Z$ . Soit donc  $f \in \mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  quelconque et  $C$  son image, le même résultat de Kleiman [Kl] nous dit qu'il existe un ouvert de  $G$  tel que pour tout élément  $g''$  de cet ouvert la courbe  $g''.C$  ne rencontre pas  $g.Z \cup g'.Z$ . Toutes ces courbes  $g''.C$  sont donc dans l'intersection. Supposons maintenant que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  a plusieurs composantes irréductibles et soient  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{H}'$  deux telles composantes. Comme les ouverts  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g.U)$  recouvrent et sont irréductibles, il existe deux éléments  $g$  et  $g'$  de  $G$  tels que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g.U)$  est un ouvert non vide de  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g'.U)$  est un ouvert non vide de  $\mathbf{H}'$ . Mais alors on sait que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g.U) \cap \mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, g'.U)$  est non vide, c'est donc un ouvert dense de  $\mathbf{H}$  et de  $\mathbf{H}'$  ce qui impose l'égalité de ces composantes.

Le principe de la démonstration sera le suivant : on commence par se ramener grâce à la proposition précédente à des ouverts de  $G/P$  dont le complémentaire est de codimension supérieure ou égale à 2 : les  $P'$ -orbites (voir paragraphe suivant). On *dévisse* ensuite ces  $P'$ -orbites en variétés plus *simples* pour lesquelles on sait résoudre le problème. Deux cas se présenteront alors selon que  $P$  est un Borel ou non :

- Un fibré en droites projectives au dessus d'une variété homogène pour laquelle on sait résoudre le problème. Dans ce cas on aura besoin d'une condition sur le degré de la courbe par rapport à cette fibration.
- Une tour de fibrés affines, de fibrés vectoriels *direction* engendrés par leurs sections, au dessus d'un produit de variétés homogènes sous des groupes dont le diagramme de Dynkin est de longueur strictement inférieure à celle du diagramme de Dynkin de  $G$ .

Pour chacun de ces cas on a une proposition qui permet d'obtenir le résultat. On commence par définir ce qu'on appelle une tour de fibrés affines.

**Définition** : Un morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  est appelé tour de fibrés affines si  $f$  se décompose en  $X \xrightarrow{f_1} X_1 \dots \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n+1}} Y$  où les  $f_i$  sont des fibrés affines.

**Proposition 3** : Si  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  est une tour de fibrés affines de fibrés vectoriels *direction* engendrés par leurs sections, si  $\alpha \in A_1(X)$ , alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X) \longrightarrow \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  est une tour de fibrés affines. En particulier, si  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  est irréductible, alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  l'est aussi.

*Démonstration* : Il suffit par récurrence de prouver le cas d'un fibré affine  $\mathcal{F}$  dont le fibré vectoriel *direction*  $F$  est engendré par ses sections. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y) \times \mathbf{P}^1 & \xrightarrow{p} & Y \\ \downarrow q & & \\ \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y) & & \end{array}$$

Le faisceau  $F$  étant engendré par ses section le faisceau  $R^1q_*p^*F$  est nul et  $q_*p^*F$  est localement libre. On va montrer le résultat suivant : le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  au dessus de  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  est le fibré affine de base  $q_*p^*F$  associé à l'élément de  $H^1q_*p^*F$  image de celui de  $H^1F$  définissant  $\mathcal{F}$ .

En effet, on a un morphisme universel  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y) \longrightarrow Y \times \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  et si on fait le produit fibré avec  $X \times \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  on obtient une variété  $Z$  qui est le fibré affine  $p^*\mathcal{F}$  au dessus de  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$ . La variété  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  est alors donnée sur chaque fibre au dessus de  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  par les sections de ce fibré, c'est à dire par le faisceau d'espaces affines  $q_*p^*\mathcal{F}$  (défini de la même façon que pour un fibré vectoriel). Comme  $q_*p^*F$  est localement libre,  $q_*p^*\mathcal{F}$  est un fibré affine de base  $q_*p^*F$ , il est associé à l'élément de  $H^1q_*p^*F = H^1p^*F$  image de celui de  $H^1F$  définissant  $\mathcal{F}$ .

**Proposition 4 :** Soit  $X \xrightarrow{\varphi} Y$  un fibré en droites projectives de fibré tangent relatif  $T_{X/Y}$  et soit  $\alpha \in A_1(X)$  tel que  $\alpha \cap T_{X/Y} \geq 0$ , alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  est un ouvert d'un fibré projectif au dessus de  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$ . En particulier, si  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  est irréductible alors  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  l'est aussi.

*Démonstration :* Soit  $E$  un faisceau localement libre de rang 2 sur  $Y$  tel que  $X = \text{Proj}_Y(\text{Sym}(E))$ . On a encore un morphisme de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  dans  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$ . Soit  $f \in \mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  et soit  $S = \text{Proj}_{\mathbf{P}^1}(\text{Sym}(f^*E))$  la surface réglée obtenue comme produit fibré de  $\mathbf{P}^1$  avec  $X$  au dessus de  $Y$ . On note  $\mathcal{O}_S(0, 1)$  le quotient tautologique de cette surface réglée et  $\mathcal{O}_S(1, 0)$  le diviseur d'une fibre (le groupe de Picard de  $S$  est  $\mathbf{Z}^2$ ). Les relèvements de  $f$  dans  $X$  de classe  $\alpha$  correspondent aux sections de  $E(c)$  (où  $c$  est un entier dépendant de  $\alpha$ ) qui sont partout injectives. Les sections de  $E(c)$  correspondent exactement aux sections de  $\mathcal{O}_S(c, 1)$ . L'entier  $c$  vérifie la condition suivante :

$$(c, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

où la matrice est celle de la forme d'intersection sur  $S$ , le vecteur de droite est la classe de  $T_{X/Y}$ ,  $a = (\varphi_*\alpha) \cap c_1(E)$  et  $b = \alpha \cap T_{X/Y}$ . On voit ainsi que  $c = \frac{1}{2}(b-a)$  (nécessairement  $b \equiv a[2]$ ). On s'intéresse donc au faisceau  $F = q_*(p^*E \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c))$  sur  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  (avec les notations de la proposition précédente pour l'incidence avec  $Y$ ). Il est localement libre de rang  $b+2$  au dessus de l'ouvert  $U$  complémentaire de  $\text{Supp}(R^1q_*((p^*E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c-1)))$ . Cet ouvert contient l'image de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$ . En effet, si  $f \in \text{Supp}(R^1q_*((p^*E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c-1)))$ , alors le faisceau  $f^*E(c)$  a un facteur de degré inférieur à  $-1$  et ses sections s'annulent toutes et ne peuvent ainsi donner des courbes sur  $X$ . Au dessus d'un point de l'ouvert  $U$ , les éléments de la fibre sont donnés par les sections partout injectives qui forment un ouvert des sections. Sur  $\text{Proj}_U(\text{Sym}(\tilde{F})) \times \mathbf{P}^1$  on a une section tautologique de  $p^*E \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(c)$ , soit  $Z$  la projection dans  $\text{Proj}_U(\text{Sym}(\tilde{F}))$  du lieu des zéros de cette section. On peut maintenant affirmer que  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  s'identifie à l'ouvert de  $\text{Proj}_U(\text{Sym}(\tilde{F}))$  complémentaire  $Z$ .

Remarquons qu'il est possible que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, X)$  soit vide si l'ouvert image  $U$  dans  $\mathbf{Hom}_{\varphi_*\alpha}(\mathbf{P}^1, Y)$  est vide.

Cette proposition est encore vraie si on remplace le fibré en droites projectives par un fibré en espaces projectifs de dimension supérieure.

## 2 Décomposition en $P'$ -orbites

### 2.1 Définition et propriétés générales

On va ici introduire une classe de variétés plus générales que les cellules de Schubert classiques. Ces variétés n'apparaissent pas ou seulement partiellement dans la littérature : certains auteurs en ont décrit des cas particuliers (Kempf [K1] et [K2], Bernstein, Gelfand et Gelfand [BGG], Lakshmibai, Musili et Seshadri [LMS], Thomsen [T]). On fixe maintenant un tore  $T$  et deux paraboliques  $P$  et  $P'$  contenant ce tore et dont l'intersection contient un Borel (que nous ne fixons pas à priori).

**Définition :** On appelle  $P'$ -orbite de  $G/P$  les orbites de  $G/P$  sous l'action de  $P'$ .

**Remarques 2 :** (1) Les  $P'$ -orbites de  $G/P$  forment une stratification de  $G/P$ , elles sont isomorphes à  $P'wP/P$  ou à  $w(P')/(w(P') \cap P)$  où  $w \in W$  ( $W$  est le groupe de Weyl de  $G$ ). Si on note pour tout parabolique  $Q$ ,  $W(Q)$  le sous groupe du groupe de Weyl qui laisse stable le parabolique  $Q$  (si on fixe un Borel  $B_0$  dans  $Q$ , ce groupe peut être vu comme le sous groupe de  $W$  engendré par les réflexions par rapport aux racines de  $B_0$  dont les opposés sont dans  $Q$ ), alors les  $P'$ -orbites de  $G/P$  sont paramétrées par les orbites de  $W$  sous l'action de  $W(P) \times W(P')$  donnée de la façon suivante :  $(g, (w, w')) \mapsto gw'w^{-1}$ .

La  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  est réunion disjointe de cellules de Schubert, ceci vient de l'écriture

$$P'wP = \coprod_{(w_1, w_2) \in W(P') \times W(P)} Bw_1ww_2B$$

avec  $B$  un Borel de  $P \cap P'$ .

(ii) Les cellules de Schubert classiques sont décrites par les variétés  $BwB/B$  où  $B$  est un Borel de  $G$  et  $w \in W$ . Ce sont les  $B$ -orbites de  $G/B$ .

Des cas plus généraux ont été décrits par exemple dans Kempf [K1] et [K2], Bernstein, Gelfand et Gelfand [BGG], Lakshmibai, Musili, Seshadri [LMS] ou Thomsen [T] qui étudient les variétés  $B'wP/P$  qui sont les cellules de Schubert de  $G/P$  par rapport à  $B'$  (cas où  $P' = B'$  est un Borel contenu dans  $P$ ) ou parfois leurs *symétriques* :  $P'wB/B$  qui sont des  $P'$ -orbites plus grandes que les cellules classiques (cas où  $P = B$  est un Borel contenu dans  $P'$ ).

**Exemple 1** : Les  $P'$ -orbites de  $G/P$  sont des ouverts lisses de  $G/P$ . Le lemme suivant nous permet de montrer que pour toute  $P'$ -orbite  $P'\overline{w}P/P$  de  $G/P$  ( $\overline{w}$  est une orbite de  $W$  sous l'action de  $W(P) \times W(P')$ ), il existe un Borel  $B$  de  $P$  et un élément  $w' \in \overline{w}$  tel que  $P'\overline{w}P/P$  contient la cellule de Schubert  $Bw'P/P$  et est contenue dans l'adhérence de cette cellule. On voit ainsi que l'adhérence de la  $P'$ -orbite  $P'\overline{w}P/P$  est une variété de Schubert.

**Lemme 1** : Soient  $P$  et  $P'$  deux paraboliques contenant un même Borel, soit  $\overline{w} \in W/(W(P) \times W(P'))$ , il existe un Borel  $B \subset P$  et un élément  $w' \in \overline{w}$  tels que  $P'\overline{w}P \subset \overline{Bw'B}$ .

*Démonstration* : On commence par montrer que l'espace tangent de  $P'\overline{w}P$  en  $w$  est  $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$  où  $\mathfrak{p}$  est l'espace tangent de  $P$  en  $e$  (l'identité) et  $\mathfrak{p}'$  est l'espace tangent de  $w(P')$  en  $e$ . En effet, l'espace tangent de  $P'we = w.w(P')$  en  $w$  est le translaté à gauche par  $w$  de  $\mathfrak{p}'$  et l'espace tangent de  $ewP$  en  $w$  est le translaté à gauche par  $w$  de  $\mathfrak{p}$ . Ainsi  $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$  est contenu dans l'espace tangent de  $P'wP$  en  $w$ . Mais  $P'wP/P$  s'identifie à  $w(P')/(w(P') \cap P)$  donc  $P'wP$  est de dimension  $\dim(\mathfrak{p} + \mathfrak{p}')$ . La lissité de  $P'wP$  nous permet de conclure que  $T_e(P'wP) = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$ .

Ainsi, notre lemme se ramène à montrer qu'il existe deux Borels  $B \subset P$  et  $B' \subset w(P')$  tels que  $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$ . En effet, le Borel  $w(B)$  est contenu dans  $w(P')$  donc il existe  $w'' \in W(P')$  tel que  $w''w(B) = B'$  donc  $B' = w'(B)$  pour  $w' \in \overline{w}$ . On aura alors  $Bw'B = w'B'B \subset P'wP$  mais comme ils ont le même espace tangent, on aura aussi  $P'wP \subset \overline{Bw'B}$ .

On utilise l'abus de notation suivant : si  $\alpha$  est une racine et  $\mathfrak{p}$  l'algèbre de Lie d'un parabolique, on dit que  $\alpha \in \mathfrak{p}$  si  $\alpha$  est une valeur propre pour l'action du tore  $\mathfrak{h}$  sur  $\mathfrak{p}$  ou encore si  $\mathfrak{g}_\alpha$  apparaît dans la décomposition de  $\mathfrak{p}$ . Soient  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  deux Borels de  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$ , on modifie ces Borels pour obtenir la propriété recherchée. Si il existe  $\alpha \in \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$  (disons dans  $\mathfrak{p}$ ) telle que  $\alpha \notin \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$  alors il existe une racine simple  $\alpha_0$  de  $\mathfrak{b}$  telle que  $-\alpha_0 \in \mathfrak{p}$  et  $-\alpha_0 \notin \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ . En effet sinon pour toute racine simple  $\alpha_i$  de  $\mathfrak{b}$  telle que  $-\alpha_i \in \mathfrak{p}$  on a  $-\alpha_i \in \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$  i.e.  $-\alpha_i \in \mathfrak{b}'$ . Mais alors  $\alpha$  s'écrit  $\alpha = \sum(-\alpha_i)$  où les  $\alpha_i$  sont des racines simples de  $\mathfrak{b}$  telles que  $-\alpha_i \in \mathfrak{b}'$  donc  $\alpha \in \mathfrak{b}'$  ce qui est absurde.

On remplace maintenant  $\mathfrak{b}$  par  $s_{\alpha_0}(\mathfrak{b})$  et on a :

$$s_{\alpha_0}(\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}' = (\mathfrak{b} + \mathfrak{b}') \cup \{-\alpha_0\}$$

on se ramène ainsi à des Borels  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  tels que  $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$ .

Ce lemme montre également l'existence d'un Borel  $B$  et d'un élément  $w' \in \overline{w}$  tel que la flèche  $Bw'B/B \rightarrow P'wP/P$  entre variétés de Schubert est une fibration en  $P/B$ .

Supposons que  $P = B$  est un Borel, les cellules de Schubert classiques de  $G/B$  sont munies d'un ordre partiel (ordre de Bruhat). Les  $P'$ -orbites de  $G/B$  décrites par  $P'\overline{w}B/B$  avec  $\overline{w} \in W/W(P')$  contiennent comme ouvert dense une cellule de Schubert classique  $Bw'B/B$  qui est donnée par  $w'$  (celui du lemme 1) qui est l'élément maximal de  $\overline{w}$  dans l'ordre de Bruhat. Cet élément est unique car les cellules associées à deux tels éléments ont la même adhérence : celle de  $P'\overline{w}B/B$ .

On va utiliser ces  $P'$ -orbites pour construire des ouverts de  $G/P$  dont le complémentaire est de codimension supérieure ou égale à 2. On commence par montrer un résultat sur ces  $P'$ -orbites qui au vu de la proposition 3 nous permettra de faire fonctionner la récurrence.

**Définition :** Les composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$  sont les diagrammes de Dynkin obtenus à partir de celui de  $G$  en enlevant les sommets correspondant à  $P'$ .

**Exemple 2 :** Dans  $SL_4$ , si  $P'$  est le parabolique correspondant aux droites, il y a deux composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$ . Ces deux composantes sont isomorphes au diagramme de Dynkin de  $SL_2$ .

**Remarques 3 :** (i) Si  $N$  est un espace vectoriel muni d'une action de  $P$ , alors on peut définir un fibré vectoriel  $\mathcal{N}$  sur  $G/P$  à partir de  $N$ . Ce fibré est le produit contracté  $G \times^P N$ . De la même façon, si  $X$  est une variété affine sur laquelle  $P$  agit à gauche, on peut définir le produit contracté  $G \times^P X$  qui est le quotient de  $G \times X$  par  $P$  (voir par exemple [DG]). Si l'action de  $P$  sur  $X$  se prolonge en une action de  $G$ , alors  $G \times^P X$  (et en particulier  $\mathcal{N}$  dans le cas d'un fibré) est trivial sur  $G/P$ .

(ii) Soit  $w \in W$ . On note  $N'$  la partie unipotente de  $w(P')$  et  $R'$  le quotient réductif correspondant. La décomposition de Levi (voir [Bo] 11.22 et 14.17-19) nous permet de dire que  $w(P')$  est le produit semi-direct de  $R'$  et  $N'$ . Cette situation est rigidifiée par le choix du tore maximal  $w(T)$  contenu dans  $w(P')$  : la décomposition de  $\mathfrak{g}$  en sous espaces propres induit une section  $s$  de  $R'$  dans  $w(P')$ . On note  $N = N' \cap P$  et  $R = R' \cap P$  (c'est l'image de  $P$  dans  $R'$ ). Le groupe  $P \cap w(P')$  est produit semi-direct de  $R$  et  $N$ . On a ainsi deux fibrés vectoriels  $\mathcal{N}'$  et  $\mathcal{N}$  sur  $R'/R$ .

(iii) Le groupe  $R'$  est produit des groupes  $G_i$  donnés par les composantes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$  et de facteurs isomorphes à  $\mathbf{C}^*$  (il y en a  $\text{rang}(\text{Pic}(G/P'))$ ). De même,  $R$  est produit de paraboliens  $P_i$  des  $G_i$  et des mêmes facteurs isomorphes à  $\mathbf{C}^*$ . Les  $P_i$  sont donnés par les sommets de  $P$  regardés dans le diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$ .

**Proposition 5 :** Le morphisme naturel  $f$  de  $P'wP/P$  vers  $R'/R$  est une tour de fibrés affines dont les fibrés vectoriels direction correspondent à la décomposition naturelle de  $\mathcal{N}'/\mathcal{N}$ . Ils sont définis sur  $R'/R$  et sont engendrés par leurs sections.

*Démonstration :* On regarde ici la  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  sous la forme  $w(P')/(w(P') \cap P)$ . Soit  $1 = N'_0 \subset N'_1 \subset \dots \subset N'_n = N'$  la suite centrale ascendante de l'unipotent  $N'$ . On note  $Z'_i = N'_i/N'_{i-1}$  qui est le centre de  $N'/N'_{i-1}$ . C'est un espace vectoriel sur lequel  $R'$  agit linéairement. Posons  $P'_i = w(P')/N'_i$ ,  $P_i$  l'image de  $P$  dans  $P'_i$  et  $Z_i = P_i \cap Z'_i$  qui est un espace vectoriel sur lequel  $R$  agit linéairement. L'écriture de  $f$  comme tour de fibré affine est  $w(P')/(w(P') \cap P) = P'_0/P_0 \longrightarrow P'_1/P_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow P'_i/P_i \longrightarrow \dots \longrightarrow P'_n/P_n = R'/R$ . Les flèches sont des fibrations localement triviales pour la topologie de Zariski et la fibre de  $P'_{i-1}/P_{i-1} \longrightarrow P'_i/P_i$  au dessus du point 1 est  $Z'_i/Z_i$ . Il s'agit de montrer que cette fibration est affine de fibré vectoriel direction l'image réciproque (par la projection  $P'_i/P_i \longrightarrow R'/R$ ) du fibré vectoriel sur  $R'/R$  déduit de la représentation  $Z'_i/Z_i$  de  $R$ .

Notons  $A = P'_{i-1}$ ,  $B = P_{i-1}$  et  $U = Z'_i$ . La fibration  $P'_{i-1}/P_{i-1} \longrightarrow P'_i/P_i$  est donc  $A/B \longrightarrow (A/U)/(B/(U \cap B)) = A/BU$ . On va montrer le lemme suivant :

**Lemme 2 :** Soient  $A$  un groupe linéaire,  $B$  et  $U$  des sous groupes fermés de  $A$ . On suppose  $U$  unipotent commutatif dans  $A$ , alors la projection  $A/B \xrightarrow{p} A/BU$  est un fibré affine dont le fibré direction sur  $A/BU$  est déduit de la représentation (par automorphismes intérieurs) de  $BU$  sur  $U/(U \cap B)$ .

*Démonstration :* On pose  $C = BU$  et on considère la variété  $A \times (C/B)$  qui est munie d'une action de  $C$  donnée de la façon suivante :  $(c, (a, x)) \mapsto (ac^{-1}, cx)$ . On peut alors regarder le quotient  $A \times^C (C/B)$  qui est muni d'une projection vers  $A/C$ . La fibration ainsi obtenue :  $A \times^C (C/B) \longrightarrow A/C$  est exactement la fibration  $p$  de l'énoncé. En effet, si on regarde l'action restreinte de  $B$  sur  $A \times (C/B)$ , le quotient  $A \times^B (C/B)$  a une projection vers  $A/B$  qui est scindée (il suffit de prendre la section qui à  $\hat{a}$  la classe de  $a \in A$  dans  $A/B$  associe la classe de  $(a, \bar{1})$  dans  $A \times^B (C/B)$ , où on a noté  $\bar{1}$  la classe de l'identité dans  $C/B$ ). Mais alors cette section et les morphismes naturels  $A \times^B (C/B) \longrightarrow A \times^C (C/B) \longrightarrow A/C$  nous donnent la flèche de  $A/B$  dans  $A/C$  qui à  $\hat{a}$  associe  $\tilde{a}$  pour tout  $a \in A$ . Ainsi, on a une flèche qui respecte les morphismes vers  $A/C$  de  $A/B$  dans  $A \times^C (C/B)$  et on peut construire sa réciproque : à la classe de  $(a, \bar{c})$  dans  $A \times^C (C/B)$  on associe  $\hat{a}\hat{c}$ .

Ainsi  $p$  est une fibration de groupe structural  $C$  agissant sur  $C/B = U/(B \cap U)$ . L'action de  $C$  est l'action naturelle de  $C$  sur  $C/B$ . Mais si  $b \in B$  et  $u \in U$  alors la classe de  $bu \in C$  dans  $U/(B \cap U)$  est celle de  $bub^{-1}$  donc l'action de  $C$  sur  $U/(B \cap U)$  est donnée par  $(bu, \bar{u}') \mapsto \bar{bub}^{-1}.bu'b^{-1}$ . On voit ainsi que cette action est affine : la partie  $bu'b^{-1}$  étant linéaire et on a la translation par  $bub^{-1}$ . La fibration  $p$  est donc affine et sa direction est donnée par la partie linéaire de l'action c'est à dire par l'action de

$C$  sur  $U/(B \cap U)$  donnée par  $(bu, \overline{u'}) \mapsto \overline{bu'b^{-1}}$ . C'est l'action restreinte de  $B \subset C$  sur  $U/(B \cap U)$  par automorphisme intérieur.

Il nous reste à voir que tous les fibrés vectoriels associés à ces fibrés affines sont définis sur  $R/R'$  et qu'ils sont tous engendrés par leurs sections. Il suffit de montrer que dans le cas de la fibration  $P'_{i-1}/P_{i-1} \longrightarrow P'_i/P_i$  l'action de  $P_i$  sur  $Z'_i/Z_i$  est en fait donnée par une action de  $P_{i+1}$ . Mais l'action est donnée par  $(p, \overline{z'}) \mapsto \overline{pz'p^{-1}}$ . Si on remplace  $p$  par  $pz$  avec  $z \in Z_{i+1}$  alors on a  $\overline{pzz'z^{-1}p^{-1}} = \overline{pz'p^{-1}}$  car  $N$  est abélien. Si on prend un élément  $\tilde{p}$  de  $P_{i+1}$ , on peut définir son action sur  $Z'_i/Z_i$  par l'action de  $p$ . On voit ainsi que tous les fibrés direction sont définis sur la base  $R'/R$ . Enfin, comme l'action de  $R$  sur  $Z'_i$  se prolonge à  $R'$ , les fibrés associés à la représentation  $Z'_i/Z_i$  de  $R$  sont quotient du fibré trivial associé à la représentation de  $R$  (qui se prolonge à  $R'$ ) dans  $Z'_i$ . Ils sont donc engendrés par leurs sections.

Si  $N'$  est abélien, le morphisme  $P'wP/P \longrightarrow R'/R$  est un fibré vectoriel. En effet, la tour se réduit à un fibré affine et de plus la section de  $R'$  dans  $P'$  nous définit une section de  $R'/R$  dans  $P'wP/P$  qui nous dit que ce fibré affine est vectoriel.

## 2.2 Etude de la codimension du bord de la $P'$ -orbite maximale

On appelle  $P'$ -orbite maximale de  $G/P$  la  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  qui est dense dans  $G/P$ . Cette orbite est unique. On cherche à quelle condition cette orbite maximale a un complémentaire de codimension supérieure ou égale à 2. On commence par donner une condition pour que  $P'wP/P$  soit la  $P'$ -orbite maximale de  $G/P$ . On fixe un Borel  $B$  dans  $P \cap P'$ .

**Lemme 3 :** *La  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  est dense dans  $G/P$  si et seulement si  $\mathfrak{p} \cap (-w(\mathfrak{p}'))$  contient l'algèbre de Lie d'un Borel, c'est à dire, si et seulement si  $w$  est dans l'orbite de  $w_0$  (l'élément de longueur maximale) sous  $W(P) \times W(P')$ .*

*Démonstration :* Il suffit de démontrer que cette condition implique que l'orbite est maximale pour l'inclusion car par unicité de cette orbite toutes les orbites ainsi obtenues seront isomorphes. Les  $P'$ -orbites sont décrites par  $w(P')/(w(P') \cap P)$  pour  $w \in W$ . Cette  $P'$ -orbite est isomorphe à  $P'/(P' \cap w^{-1}(P))$ . Pour maximiser cette orbite on cherche à minimiser  $P' \cap w^{-1}(P)$ . Pour que cette intersection soit minimale il faut et il suffit que  $w^{-1}(\mathfrak{p})$  contienne le moins de racines de  $\mathfrak{p}'$  possible. C'est le cas si et seulement si  $w(\mathfrak{p}')$  contient toutes les racines qui ne sont pas dans  $\mathfrak{p}$ . Donc si  $\mathfrak{p}$  et  $-w(\mathfrak{p}')$  contiennent le même Borel l'orbite est maximale pour l'inclusion et réciproquement.

Soit  $B$  un Borel de  $G$  et soit  $P$  un parabolique de  $G$  contenant  $B$ , on note  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  les racines simples de  $\mathfrak{b}$  correspondant aux sommets du diagramme de Dynkin qui définissent  $\mathfrak{p}$ . Par exemple  $\Sigma(\mathfrak{b}, \mathfrak{b})$  est l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin. On définit une involution  $i$  du diagramme de Dynkin de la façon suivante : soit  $B$  un Borel de  $G$  et  $\mathfrak{b}$  son algèbre de Lie, soit  $w_0 \in W$  le seul élément du groupe de Weyl qui envoie  $\mathfrak{b}$  sur  $-\mathfrak{b}$  (c'est l'élément de longueur maximale), soit  $\alpha$  une racine simple de  $\mathfrak{b}$  (cette racine correspond à un sommet du diagramme de Dynkin), on définit  $i(\alpha)$  comme étant la racine simple de  $\mathfrak{b}$  égale à  $-w_0(\alpha)$ . Cette involution correspond à l'involution classique du diagramme de Dynkin de  $A_n$ ,  $D_{2n}$  et  $E_6$  et à l'identité sur les autres diagrammes.

**Proposition 6 :** *La  $P'$ -orbite maximale  $P'w_0P/P$  a un complémentaire de codimension supérieure ou égale à 2 dans  $G/P$  si et seulement si dans le diagramme de Dynkin,  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  et  $i(\Sigma(\mathfrak{p}', \mathfrak{b}))$  sont disjoints.*

*Démonstration :* Il suffit de montrer que l'application naturelle  $p$  de  $\text{Pic}(G/P)$  dans  $\text{Pic}(P'w_0P/P)$  est injective. Or le noyau de cette application est donné par  $\text{Pic}(G/P) \cap \text{Pic}(G/w_0(P'))$  dans  $\text{Pic}(G/(P \cap w_0(P')))$   $\subset \mathfrak{h}^*$  (car le noyau de l'application  $\text{Pic}(G/(P \cap w_0(P'))) \longrightarrow \text{Pic}(w_0(P')/(P \cap w_0(P')))$  est  $\text{Pic}(G/w_0(P'))$ ).

Pour que  $p$  soit injective, il faut et il suffit que cette intersection soit nulle. Or  $\text{Pic}(G/P)$  est l'orthogonal dans  $\mathfrak{h}^*$  de l'ensemble  $\alpha(\mathfrak{p})$  des racines  $\alpha \in \mathfrak{p}$  telles que  $-\alpha \in \mathfrak{p}$ . On voit que l'intersection  $\text{Pic}(G/P) \cap \text{Pic}(G/w_0(P'))$  est nulle si et seulement si  $\alpha(\mathfrak{p}) \cup \alpha(w_0(\mathfrak{p}'))$  engendre tout  $\mathfrak{h}$ . Si  $RS$  est l'ensemble des racines simples de  $\mathfrak{b}$ , alors  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b}) = RS \setminus (\alpha(\mathfrak{p}) \cap RS)$  et  $\Sigma(-w_0(\mathfrak{p}'), \mathfrak{b}) = RS \setminus (\alpha(w_0(\mathfrak{p}')) \cap RS)$ . On voit alors que  $\alpha(\mathfrak{p}) \cup \alpha(w_0(\mathfrak{p}'))$  engendre tout  $\mathfrak{h}$  si et seulement si  $(\alpha(\mathfrak{p}) \cap RS) \cup (\alpha(w_0(\mathfrak{p}')) \cap RS) = RS$  ce qui est équivalent à  $\Sigma(\mathfrak{p}, \mathfrak{b})$  et  $\Sigma(-w_0(\mathfrak{p}'), \mathfrak{b}) = i(\Sigma(\mathfrak{p}', \mathfrak{b}))$  sont disjoints.

**Remarques 4 :** (1) Cette condition nous permet de construire pour tout parabolique  $P$  qui n'est pas un

Borel un parabolique  $P'$  tel que la  $P'$ -orbite  $P'w_0P/P$  soit maximale et que son complémentaire soit de codimension au moins 2. En effet, soit  $P$  un parabolique qui n'est pas un Borel, alors il correspond dans le diagramme de Dynkin à un ensemble  $\Sigma$  de sommets qui ne contient pas tous les sommets, il suffit alors de prendre pour  $P'$  un parabolique maximal dont le sommet  $s$  dans le diagramme de Dynkin n'est pas dans  $i(\Sigma)$ . Par contre cette proposition nous montre que ceci ne sera jamais possible avec les Borels. On propose donc une autre méthode pour résoudre ce cas (voir proposition 7).

(ii) Soit  $P$  un parabolique qui n'est pas un Borel et  $P'$  un parabolique tel que  $P$  et  $P'$  vérifient les hypothèses de la proposition 6. Alors la variété  $R'/R$  obtenue à la proposition 5 est donnée par le produit des variétés homogènes (sous les groupes  $G_i$  définis par les composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$ ) de paraboliques  $P_i$  définis par les points du diagramme de Dynkin de  $i(\Sigma(\mathfrak{p}))$ . Autrement dit, si on considère sur le diagramme de Dynkin les sommets de  $P$  après involution et ceux de  $P'$  alors ces diagrammes sont disjoints et les  $P_i$  sont donnés dans les composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$  par les points du diagramme de  $i(\Sigma(\mathfrak{p}))$  quand on a retiré ceux de  $P'$ . Par exemple si on considère la variété des droites de  $\mathbf{P}^4$  et que l'on prend pour  $P'$  un parabolique fixant une droite alors  $R'/R$  est  $\mathbf{P}^2$ .

**Proposition 7 :** Soit  $B$  un Borel et  $P$  un parabolique contenant  $B$  dont le diagramme de Dynkin (par rapport à  $B$ ) a trois sommets consécutifs et que celui du milieu n'est rattaché qu'à deux sommets dans le diagramme de Dynkin de  $G$  (respectivement a deux sommets consécutifs dont l'un est au bord du diagramme), soit  $P'$  le parabolique obtenu en enlevant le sommet du milieu (respectivement celui du bord), alors  $G/P$  est un  $\mathbf{P}^1$ -bundle au dessus de  $G/P'$

*Démonstration :* Soient  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$  les algèbres de Lie de  $P$  et  $P'$ , on voit que  $\mathfrak{p}$  est une sous algèbre de  $\mathfrak{p}'$  et que si  $\alpha$  est la racine simple de  $B$  qui correspond au sommet que l'on a retiré alors  $\mathfrak{p}'$  est l'algèbre de Lie engendrée par  $\mathfrak{p}$  et  $-\alpha$ . Mais comme le sommet correspondant à  $\alpha$  forme une composante connexe du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$ , alors on voit que  $\alpha$  est orthogonale à toutes les racines simples négatives de  $\mathfrak{p}$  ce qui impose  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ .

**Remarque 5 :** Soient  $P$  et  $P'$  comme dans la proposition précédente, si  $C$  est une courbe tracée sur  $G/P$  dont la classe est  $x \in A_1(G/P)$ , alors son degré par rapport à la fibration est donné par  $(x, \alpha)$  où  $\alpha$  est la racine simple (et donc le caractère) qui correspond au sommet que l'on a retiré. En d'autres termes, avec les notations de la proposition précédente, si  $\alpha$  est le sommet (la racine) que l'on a retiré, alors le fibré tangent relatif  $T_{G/P/G/P'}$  est de première classe de Chern  $\alpha$  (voir par exemple [D]).

Si  $P$  est un Borel, on peut appliquer cette proposition à tous les sommets du diagramme de Dynkin. Si de plus  $C$  est une courbe tracée dans  $G/B$  dont la classe  $x \in A_1(G/B)$  est dans le cône positif, alors il existe au moins un sommet du diagramme pour lequel le degré de  $C$  sera positif. En effet,  $x$  est dans le cône positif si et seulement si pour toute racine simple  $\alpha$  on a  $(x, \check{\alpha}) \geq 0$  (où  $\check{\alpha}$  est la coracine de  $\alpha$ ). Mais les coracines forment le cône ample et sont donc combinaisons linéaires à coefficients positifs des racines simples. Si pour toute racine simple  $\alpha$  on a  $(x, \alpha) < 0$  alors  $x$  ne peut pas être dans le cône positif. Ceci nous permettra donc d'appliquer la proposition 4. De même, si  $x$  est dans le cône strictement positif, il existe un sommet du diagramme de Dynkin tel que  $(x, \alpha) > 0$ .

**Application : démonstration de l'irréductibilité du schéma de Hilbert :** On raisonne par récurrence sur la longueur du diagramme de Dynkin (nombre de sommets). Le cas de  $SL_2$  est évident. Soit  $P$  un parabolique de  $G$  et soit  $\alpha \in A_1(G/P)$  dans le cône positif. Si  $P$  est un Borel, on a vu à la remarque 6 qu'il existe un sommet du diagramme de Dynkin correspondant à la racine simple  $\alpha'$  tel que  $(\alpha, \alpha') \geq 0$ . Dans ce cas  $G/B$  est une fibration en droites projectives au dessus de  $G/P'$  tel que le degré de  $\alpha$  par rapport à cette fibration est positif. La proposition 4 nous permet donc de nous ramener au cas où  $P$  n'est pas un Borel.

La remarque 5 nous permet alors de construire un parabolique  $P'$  tel que la  $P'$ -orbite  $P'w_0P/P$  est maximale et que son complémentaire est de codimension au moins 2. La proposition 2 nous permet de nous ramener au problème d'irréductibilité du schéma des morphismes pour cette orbite.

Enfin, la proposition 5 nous dit que  $P'w_0P/P$  est une tour de fibrés affines associés à des fibrés vectoriels engendrés par leurs sections au dessus d'un produit de variétés homogènes sous des groupes dont le diagramme de Dynkin est de longueur strictement inférieure à celle du diagramme de Dynkin de  $G$ . On conclue par hypothèse de récurrence en utilisant la proposition 3.



**Remarque 6 :** On sait de la même façon que tous les schémas  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, U)$  où  $U$  est une  $P'$ -orbite de  $G/P$  sont irréductibles.

## 2.3 Existence de courbes lisses

On va dans ce paragraphe montrer l'existence de courbes lisses sur les variétés homogènes. On se restreindra au cas où la classe de la courbe est dans le cône strictement positif et on verra (remarque 8) comment se ramener à ce cas si la courbe est dans le cône positif. On appelle courbe nodale une courbe irréductible et génériquement réduite qui est lisse ou qui a pour seules singularités des points doubles ordinaires. Si  $F$  est un fibré vectoriel sur un schéma  $X$ , on dit que  $F$  sépare les points si pour tout couple de points  $(P, Q)$  de  $X$ , on a  $h^0(F \otimes \mathcal{I}_P) > h^0(F \otimes \mathcal{I}_{P \cup Q})$ . Si  $X$  est une variété et  $\alpha \in A_1(X)$ , on note  $\mathfrak{H}_{0,\alpha}(X)$  le schéma de Hilbert des courbes rationnelles nodales de classe  $\alpha$ . On dit que  $X$  vérifie la condition  $(*)$  si la variété d'incidence  $\{(x, C) \in X \times \mathfrak{H}_{0,\alpha}/x \in \text{Sing}(C)\}$  est irréductible.

**Lemme 4 :** Soit  $X$  une variété munie d'un fibré affine  $\mathcal{F}$ , de fibré vectoriel direction  $F$  et défini par  $\eta \in H^1(X, F)$ . Soit  $C$  une courbe rationnelle irréductible et génériquement réduite sur  $X$  et  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow C$  une désingularisation de  $C$ . On note  $\bar{\eta}$  la restriction de  $\eta$  à  $H^1(C, F|_C)$ . Si on suppose que  $F$  est engendré par ses sections, alors il existe un relèvement de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F}|_C)$  le fibré affine associé à  $\mathcal{F}$  au dessus de  $C$ . Si on suppose de plus que  $C$  est nodale et que l'une des conditions suivante est vérifiée :

(i)  $\bar{\eta} \neq 0$  et  $X$  vérifie  $(*)$

(ii)  $f^*F|_C$  sépare les points

alors il existe un relèvement lisse de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F})|_C$ .

*Démonstration :* Comme  $F$  est engendré par ses sections,  $H^1 f^*F|_C$  est nul donc  $f^*F|_C$  est le fibré vectoriel  $f^*F|_C$  qui est engendré par ses sections. Une telle section nous donne un relèvement de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F}|_C)$ . Si  $C$  est lisse, alors un relèvement quelconque de  $C$  est lisse.

Si  $\bar{\eta} \neq 0$ , le fibré affine n'est pas vectoriel et n'a donc pas de section. Prenons un relèvement  $f'$  de  $f$  donné par une section de  $f^*F|_C$ . Ce relèvement est nécessairement non bijectif sur  $C$  (sinon ce serait une section de  $\mathcal{F}|_C$ ). C'est donc une désingularisation partielle de  $C$ . Ainsi, il existe un relèvement  $f'$  de  $f$  qui désingularise au moins un point de  $C$ . Mais par monodromie (le groupe de monodromie agit transitivement sur les points singulier grace à la condition  $(*)$ , cf. [ACGH] ou [Har]) on sait que pour chaque point double il existe une section de  $f^*F|_C$  qui désingularise ce point. En prenant une section générale on obtient une désingularisation en tout point.

Supposons que  $f^*F|_C$  sépare les points. On sait que  $H^1 f^*F|_C$  est nul c'est à dire  $f^*F|_C$  est le fibré vectoriel  $f^*F|_C$ . Soit  $P$  un point double de  $C$  et  $x$  et  $y$  ses antécédents par  $f$ . Il existe une section de  $f^*F|_C$  qui sépare  $x$  et  $y$ . Mais alors cette section nous donne un relèvement  $f'$  de  $f$  qui désingularise  $P$ . Ainsi, il existe un relèvement désingularisant chaque point double et une section générale de  $f^*F|_C$  nous donne un relèvement lisse.

Si  $\bar{\eta} = 0$  et qu'on ne suppose plus que  $f^*F|_C$  sépare les points alors il n'existe pas nécessairement de relèvement lisse de  $f$ . C'est le cas si  $F$  est trivial sur une courbe nodale.

**Remarques 7 :** (1) Avec les notations du lemme, supposons que  $C$  est contenue dans une variété homogène  $X$  et que sa classe dans  $A_1(X)$  est dans le cône strictement positif. Supposons de plus que  $c_1(F)$  est non nul dans le cône ample de  $\text{Pic}(X)$  alors il existe un relèvement lisse de  $f$  dans  $\text{Aff}(\mathcal{F})$ . En effet, il suffit de vérifier que l'une des condition du lemme est vérifiée. Il suffit donc de vérifier que  $f^*F$  sépare les points. Mais le degré de  $f^*F$  sur  $\mathbf{P}^1$  est strictement positif donc  $f^*F$  sépare les points.

(ii) On aura dans la suite besoin de savoir que  $\mathbf{P}^2$  vérifie la condition  $(*)$ . Ceci est fait dans [ACGH].

**Lemme 5 :** Soient  $C$  une courbe rationnelle irréductible et génériquement réduite et  $\mathbf{P}_C(E) \xrightarrow{\varphi} C$  une fibration en droites projectives au dessus de  $C$  d'espace tangent relatif  $T$ . Soit  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow C$  une désingularisation de  $C$ . Supposons que  $f^*E = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(x)$  avec  $x \geq 0$ . Soit  $d \geq 0$  un entier tel que  $d \equiv x[2]$  et  $d \geq x$ , alors il existe un relèvement  $f'$  de  $f$  tel que  $f'_*[\mathbf{P}^1] \cap T = d$ . Supposons de plus que  $C$  est nodale et  $d > 0$ , alors on peut choisir  $f'$  d'image lisse.

*Démonstration :* Les relèvements de degré relatif  $d$  de  $f$  sont donnés par les quotients isomorphes à  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\frac{x+d}{2})$  de  $f^*E$ . Un tel quotient existe si et seulement si  $d \equiv x[2]$  et  $\frac{x+d}{2} \geq x$  c'est à dire  $d \geq x$  ce qui est le cas. En effet, si les conditions sont vérifiées, il existe un tel quotient. Si  $d < x$  alors pour avoir un tel quotient il faut que  $\frac{x+d}{2} = 0$  c'est à dire  $d = x = 0$ . C'est absurde.

Dans le cas où  $C$  est nodale, il suffit de vérifier que l'on peut séparer les points. La donnée d'un quotient de  $f^*E$  isomorphe à  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\frac{x+d}{2})$  étant équivalente à la donnée d'une section partout non nulle de  $f^*E(\frac{d-x}{2})$ , on est ramené à montrer que pour tout couple de points  $(x, y)$  de  $\mathbf{P}^1$  il existe une telle section  $s$  telle que  $s(x)$  et  $s(y)$  sont linéairement indépendants. Mais  $f^*E(\frac{d-x}{2}) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\frac{x+d}{2}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(\frac{d-x}{2})$  donc ceci est possible dès que  $\frac{d-x}{2} \geq 0$  et  $\frac{x+d}{2} > 0$ , ce qui est vérifié sous nos hypothèses.

Si on ne suppose plus  $d > 0$ , il n'existe pas nécessairement de relèvement lisse de  $f$ . En effet, si  $E$  est trivial et  $C$  nodale alors  $\mathbf{P}_C(E) = C \times \mathbf{P}^1$  n'a pas de relèvement lisse de  $C$ .

La condition  $d \equiv x [2]$  ne dépend que de la classe  $\alpha$  du relèvement  $f'$  et de  $c_1(E)$ . En effet, on a  $d = \alpha \cap T$  et  $x = (\varphi_*\alpha) \cap c_1(E)$ . La condition  $d \geq x$  est équivalente à  $h^1 f^*E(\frac{d-x}{2} - 1) = 0$ . C'est donc une condition ouverte.

**Démonstration de l'existence de courbes lisses :** On procèdera de la façon suivante : on commence par supposer que pour  $\alpha$  positive dans  $A_1(G/P)$ , le schéma  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, G/P)$  est non vide. On ramène le cas d'un Borel à celui d'un parabolique qui n'est pas un Borel. On montre ensuite le résultat par récurrence sur la longueur du diagramme de Dynkin. On initialise la récurrence en montrant les cas des groupes dont le diagramme est de longueur au plus 3. On montrera le cas de  $G_2$  par une méthode différente. Enfin on montre que  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, G/P)$  est non vide si  $\alpha$  est positive.

On suppose connu les résultats suivants : il existe des courbes rationnelles lisses sur  $\mathbf{P}^n$  dès que  $n \geq 3$ , sur  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^n$  dès que  $n \geq 2$  (lemme 5) et sur  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  (lemme 5). Sur  $\mathbf{P}^2$  et  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  il existe des courbes nodales. Soit  $\alpha$  dans le cône strictement positif de  $A_1(G/P)$ .

**LE CAS DES BORELS :** Si  $P = B$  est un Borel, la remarque 5 nous permet de trouver un parabolique  $P'$  tel que  $G/B \rightarrow G/P'$  est une fibration en droites projectives de fibré tangent relatif  $T$  vérifiant  $\alpha \cap T > 0$ . Comme on a supposé  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, G/B)$  non vide, il existe une courbe de  $G/P'$  telle que la fibration vérifie les conditions du lemme 5. Comme ces conditions sont ouvertes, la courbe générale vérifie ces conditions. On est donc ramené à prouver l'existence de courbes lisses (et même seulement à points doubles ordinaires) sur  $G/P'$ . Ceci nous permet notamment de dire que sur  $SL_3/B$  il existe des courbes lisses dont la classe est quelconque dans le cône strictement positif.

**LE CAS GÉNÉRAL :** On procède par récurrence sur la longueur du diagramme de Dynkin. On choisit un parabolique  $P'$  tel que la  $P'$ -orbite  $P'w_0P/P$  est maximale. La proposition 5 et le lemme 4 nous permettent de construire des courbes lisses sur les ouverts  $P'w_0P/P$  : dès qu'il y a des courbes lisses sur  $R'/R$ , il y en a sur la  $P'$ -orbite (on prend une section du fibré affine). Par hypothèse de récurrence, les seuls cas qui posent problème sont donc ceux où  $R'/R$  est  $\mathbf{P}^1$ ,  $\mathbf{P}^2$  ou  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ . Dans ce cas le rang du groupe de Picard est au plus 2 et  $P$  est donné par au plus deux points dans le diagramme de Dynkin. On choisit pour  $P'$  le parabolique maximal qui correspond à un point extrême du diagramme de Dynkin. Ainsi dans le cas de  $SL_n$  on se ramène à  $SL_{n-1}$  ; dans le cas de  $Sp_{2n}$  on se ramène à  $SL_n$  ou  $Sp_{2n-2}$  ; dans le cas de  $SO_{2n+1}$  on se ramène à  $SL_n$  ou  $SO_{2n-1}$  ; dans le cas de  $SO_{2n}$  on se ramène à  $SL_n$  ou  $SO_{2n-2}$  ; dans le cas de  $F_4$  on se ramène à  $Sp_6$  ou  $SO_7$  ; dans le cas de  $E_6$  on se ramène à  $SL_6$  ou  $SO_{10}$  ; dans le cas de  $E_7$  on se ramène à  $SL_7$ ,  $SO_{12}$  ou  $E_6$  et dans le cas de  $E_8$  on se ramène à  $SL_8$ ,  $SO_{14}$  ou  $E_7$ .

Ce choix de  $P'$  n'est pas toujours possible pour  $SL_{n+1}$ ,  $Sp_{2n}$ ,  $SO_{2n+1}$  et  $F_4$  qui n'ont que deux points extrêmes. Ceci ne se produit que si  $P$  est donné par les deux points extrêmes. Dans ce cas, on choisit l'avant dernier point du diagramme. La variété  $R'/R$  est alors  $\mathbf{P}^{n-2} \times \mathbf{P}^1$  pour les trois premiers groupes et  $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$  pour  $F_4$ . Il existe donc des courbes lisses sur  $R'/R$  dès que  $n \geq 4$ .

Pour initialiser la récurrence, il nous faut donc montrer les cas de  $SL_4$ ,  $Sp_4 = SO_5$ ,  $Sp_6$  et  $SO_7$ .

On se ramène, dans le cas de  $SL_4$ , pour les incidences point/droite et droite/plan, à  $SL_3/B$  sur laquelle il y a des courbes lisses. Il existe une  $P'$ -orbite de l'incidence point/plan qui est un fibré vectoriel de degré (1, 1) au dessus de  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ . Le lemme 4 (et la remarque 7) nous permet de construire des courbes lisses sur cette  $P'$ -orbite. De même il existe une  $P'$ -orbite de la Grassmannienne des droites qui est un fibré vectoriel de degré 1 au dessus de  $\mathbf{P}^2$ . Le lemme 4 nous permet de conclure.

Pour  $Sp_4$ , les variétés homogènes associées à des paraboliques maximaux sont  $\mathbf{P}^3$  et  $Q_3$  la quadrique de  $\mathbf{P}^4$ . On va traiter le cas de  $Q_3$  en fin de démonstration et sur  $\mathbf{P}^3$  il y a des courbes lisses. Sur  $Sp_4/B$  on sait tracer des courbes lisses en se ramenant soit à  $\mathbf{P}^3$  soit à  $Q_3$ .

Pour  $Sp_6$  : si le groupe de Picard est de rang 1, soit le point de  $P$  est le dernier du diagramme alors en prenant le premier point on a un morphisme vers  $Q_3$  qui a des courbes lisses, soit ce n'est pas le cas et en choisissant le dernier point on arrive dans  $\mathbf{P}^2$  avec un fibré vectoriel de degré 2 ou 3. On conclue grâce au lemme 3 (et à la remarque 7). Si le groupe de Picard est de rang 2, on a deux cas selon que les

points sont aux deux extrémités ou non. Dans le premier cas on arrive, en prenant le point du milieu, dans  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  avec un fibré vectoriel de degré (1, 1) on conclue grace au lemme 3 (et à la remarque 7), dans le second on prend un des deux points extrêmes et on arrive dans  $SL_3/B$  ou  $Sp_4/B$ .

Pour  $SO_7$  : si le groupe de Picard est de rang 1, soit le point de  $P$  est le dernier du diagramme alors en prenant le premier point on a un morphisme vers  $\mathbf{P}^3$ , soit ce n'est pas le cas et en choisissant le dernier point on arrive dans  $\mathbf{P}^2$  avec un fibré vectoriel de degré 1 ou 2. On conclue grace au lemme 3 (et à la remarque 7). Si le groupe de Picard est de rang 2, on a deux cas selon que les points sont aux deux extrémités ou non. Dans le premier cas on arrive en prenant le point du milieu dans  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$  avec un fibré vectoriel de degré (1, 2) on conclue grace au lemme 3 (et à la remarque 7), dans le second on prend un des deux points extrêmes et on arrive dans  $SL_3/B$  ou  $Sp_4/B$ .

LE CAS DE  $G_2$  : Le cas de  $G_2$  pose un problème et on ne peut montrer l'existence de courbes lisses par cette méthode. On va utiliser une seconde méthode. L'une des variétés homogènes de  $G_2$  est  $Q_5$  la quadrique de  $\mathbf{P}^6$  pour laquelle le problème est déjà résolu il faut donc le vérifier pour l'autre variété homogène associée à un parabolique maximal et l'incidence qui est un  $\mathbf{P}^1$ -bundle au dessus de chacune des deux.

On a la situation suivante : soient  $P_1$  et  $P_2$  les paraboliques maximaux de  $G_2$  et  $B$  un Borel les contenant. On a alors l'incidence donnée par les flèches  $f : G_2/B \rightarrow G_2/P_1$  et  $g : G_2/B \rightarrow G_2/P_2$ . On sait de plus que  $f$  est une fibration en  $\mathbf{P}^1$ . On considère  $G_2/P_2$  plongé dans son plongement minimal qui est alors une quadrique de dimension 5 (dont on sait qu'elle a des courbes lisses). On regarde une section hyperplane générale  $H$  (sur laquelle il y a aussi des courbes lisses). On obtient ainsi des morphismes  $f'$  et  $g'$  par restriction. Les conditions suivantes sont réalisées :

-Le morphisme  $f'$  est birationnel de  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H)$  vers  $G_2/P_1$  et c'est un isomorphisme en dehors d'un fermé  $E$  de codimension au moins 1 de  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H)$ . Donc  $f'(E)$  est de codimension au moins 2.

- Le morphisme  $g$  permet de réaliser  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H) - E$  comme un fibré vectoriel engendré par ses sections au dessus de  $(G_2/P_2) \cap H - Z$  où  $Z$  est un fermé de codimension au moins 2 contenu dans  $g(E)$ .

Ainsi, comme il existe des courbes lisses sur  $(G_2/P_2) \cap H$  et que  $g'$  est un fibré vectoriel engendré par ses sections, il existe des courbes lisses sur  $g^{-1}((G_2/P_2) \cap H) - E$  et par  $f'$  des courbes lisses sur  $G_2/P_1$ .

LE CAS DE  $Q_3$  : Il nous reste à montrer qu'il existe des courbes rationnelles lisses de tous les degrés sur  $Q_3$ . On considère cette variété comme les droites isotropes pour une forme symplectique dans un espace de dimension 4 (c'est à dire comme une variété homogène sous  $Sp_4$ ). La variété d'incidence avec  $\mathbf{P}^3$  est donné par le fibré projectif associé au faisceau de nulle corellation  $E$  défini par la forme symplectique :  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(-1) \rightarrow \Omega^1(1) \rightarrow E \rightarrow 0$ . On fixe un point  $P_0$  de  $\mathbf{P}^3$ . Soit  $H_0$  l'orthogonal de ce point et  $L_0$  la droite de  $Q_3$  formée par les droites isotropes de  $H_0$ . La restriction de  $E$  à  $H_0$  est donnée par l'extension non triviale  $0 \rightarrow \mathcal{O}_{H_0} \rightarrow E \rightarrow \mathcal{I}_{P_0} \rightarrow 0$ . Au dessus de  $H_0 - P_0$  le fibré  $E$  est une extension non triviale de  $\mathcal{O}_{H_0 - P_0}$  par lui même qui a une unique section  $s$  donnée par  $P \mapsto (P, (PP_0))$ . Soit  $Z$  l'image de cette section.

On s'intéresse maintenant à  $Q_3 - L_0$  et la variété d'incidence  $X$  (qui est au dessus de  $\mathbf{P}^3 - P_0$ ). On a une section de  $Q_3 - L_0$  vers  $X$  donnée par  $L \mapsto (L \cap H_0, L)$ . Soit  $Y$  l'image de cette section, si on reprojette  $Y$  vers  $\mathbf{P}^3$ , son image est  $H_0 - P_0$ . Plus précisément  $Y$  est le fibré  $\mathbf{P}_{H_0 - P_0}(E)$  privé de la section  $Z$ .  $Y$  est donc un fibré affine non vectoriel au dessus de  $H_0 - P_0$ , de fibré vectoriel direction  $\mathcal{O}_{H_0 - P_0}$ , donné par  $\eta \in H^1 \mathcal{O}_{H_0 - P_0}$ . On cherche à tracer des courbes lisses grace au lemme 4. Soit  $C$  une courbe rationnelle nodale de degré  $d$  sur  $H_0 - P_0$ , on cherche à la relever en une courbe lisse dans  $Y$  qui est isomorphe à  $Q_3 - L_0$ . Le lemme 4 nous dit (qu'il faut et) qu'il suffit que l'image  $\bar{\eta}$  de  $\eta$  dans  $H^1 \mathcal{O}_C$  soit non nulle (ou que  $C$  soit lisse). Ceci est vrai dès que  $d \geq 3$  (si  $d \leq 2$  la courbe  $C$  est lisse).

EXISTENCE DE COURBES RATIONNELLES PARAMÉTRÉES : Pour terminer la démonstration du théorème 1, il nous reste à prouver la non vacuité de  $\mathbf{Hom}_\alpha(\mathbf{P}^1, G/P)$  pour  $\alpha$  dans le cône positif. Si  $P$  n'est pas un Borel, en prenant tous les points du diagramme distincts de ceux de  $P$  après involution, on construit une  $P'$ -orbite maximale qui est une tour de fibrés affines au dessus de  $R'/R$  dont les fibrés vectoriels direction sont engendrés par leurs sections. De plus le choix de  $P'$  nous permet de dire que  $R'/R$  est un produit de variétés de la forme  $G'/B'$  où  $B'$  est un Borel de  $G'$ . Le lemme 4 nous permet de nous ramener au cas des Borels.

Il reste donc à traiter ce cas. Pour cela on procède une fois encore par récurrence sur la longueur du diagramme de Dynkin. On utilise la construction suivante en supposant que la longueur du diagramme est au moins 3. Soit  $B$  un Borel de  $G$ , soit  $\alpha \in A_1(G/B)$  dans le cône positif, soient  $x$  et  $y$  deux points du diagramme de Dynkin qui ne sont pas sur la même arête, et notons  $P_x$  (resp.  $P_y$ ) et  $P_{x,y}$  les paraboliques donnés par tous les points du diagramme sauf  $x$  (resp. sauf  $y$ ) et par tous les points du diagramme sauf

$x$  et  $y$ . On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G/B & \xrightarrow{p'} & G/P_x \\ \downarrow q' & & \downarrow q \\ G/P_y & \xrightarrow{p} & G/P_{x,y} \end{array}$$

Toutes les flèches de ce diagramme sont des fibrations en droites projectives et si  $p$  et  $q$  sont donnés par les fibrés  $E$  et  $F$  de rang 2, alors  $p'$  et  $q'$  sont donnés par les fibrés  $q^*E$  et  $p^*F$ .

Sur  $G/P_x$  (resp.  $G/P_y$ ), on sait tracer des courbes de classe  $p'_*\alpha$  (resp.  $q'_*\alpha$ ). En effet, la remarque préliminaire permet de se ramener au cas des Borels d'un groupe dont le diagramme de Dynkin est de longueur strictement inférieure à celle de  $G$  et on conclue par hypothèse de récurrence. Ceci nous permet d'affirmer que dans  $G/P_{x,y}$  il existe des courbes vérifiant la condition du lemme 5 pour le fibré  $F$ . Ces courbes forment un ouvert  $U$  non vide de  $\mathbf{Hom}_{p'_*\alpha}(\mathbf{P}^1, G/P_{x,y})$ .

De la même façon on voit que  $\mathbf{Hom}_{q'_*\alpha}(\mathbf{P}^1, G/P_y)$  est non vide. Son image dans  $\mathbf{Hom}_{q_*q'_*\alpha}(\mathbf{P}^1, G/P_{x,y})$  ( $q_*q'_*\alpha = p_*p'_*\alpha$ ) est un ouvert (proposition 4) non vide. Elle rencontre donc l'ouvert  $U$  précédent. Ainsi, il existe dans  $\mathbf{Hom}_{p_*\alpha}(\mathbf{P}^1, G/P_y)$  un élément  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow G/P_y$  tel que  $f^*p^*F = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(x)$  avec  $x \geq 0$ ,  $x \equiv d[2]$  et  $x \leq d$  où  $d = p'_*\alpha \cap T_q$  est le degré de  $p'_*\alpha$  par rapport à la fibration  $q$  ( $T_q$  est le fibré tangent relatif de  $q$ ). Mais le degré de  $\alpha$  par rapport à la fibration  $q'$  est  $\alpha \cap T_{q'} = \alpha \cap p'^*T_q = p'^*(p'_*\alpha \cap T_q) = d$ . Ainsi  $f$  vérifie les conditions du lemme 5 pour  $p^*F$  et ceci nous permet de construire un relèvement dans  $G/B$ .

On s'est ainsi ramené aux cas des groupes dont le diagramme est de longueur au plus 2. Pour  $SL_2$  et  $SO_4 = SL_2 \times SL_2$  c'est évident. Il nous reste donc à montrer le cas variétés de drapeaux complets des groupes  $SL_3$ ,  $SO_5 = Sp_4$  et  $G_2$ . On procède pour les trois de la même façon et on note  $G$  l'un de ces trois groupes. Soit  $X$  la variété homogène qui correspond aux droites (pour le second groupe on le considère comme  $Sp_4$ ) et  $Y$  l'autre variété homogène (qui correspond aux points). Soit  $B$  un Borel de  $G$ , soit  $\varphi$  la fibration en droites projectives  $G/B \rightarrow X$  et de fibré tangent relatif  $T_\varphi$  et soit  $\alpha \in A_1(G/B)$  de degrés  $d_1$  et  $d_2$  par rapport à  $Y$  et  $X$ , alors  $\alpha \cap T_\varphi = 2d_1 - d_2$ . Soit  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow X$  un morphisme de degré  $d_2$ . Soit  $E$  la restriction du fibré tautologique de la Grassmannienne  $\mathbf{G}(2, m)$  ( $m = 3, 4, 7$  selon les cas) à  $X$ , c'est un fibré vectoriel associé à la fibration  $\varphi$ . On a nécessairement  $f^*E = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(b)$  avec  $0 \leq a \leq b$  et  $a + b = d_2$ . Ainsi  $f$  vérifie les hypothèses du lemme 5 dès que  $2d_1 - d_2 \geq d_2 \geq b - a$  ie  $d_1 \geq d_2$  ce qui dans ce cas nous permet de relever  $f$  dans  $G/B$ .

Il nous reste donc à tracer des courbes sur  $G/B$  pour  $d_2 \geq d_1$ . Pour ceci on trace une courbe de bidegré  $(d_1, d'_2)$  dans  $G/B$  avec  $d_1 \geq d'_2$ . Ceci nous permet de dire qu'il existe un faisceau  $F$  associé à la fibration de  $G/B$  au dessus de  $Y$  tel que si  $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow Y$  est le morphisme induit, alors  $f^*F$  vérifie les hypothèses du lemme 5 (le degré relatif  $d$  est alors  $2d'_2 - d_1$  pour  $SL_3$ ,  $2d'_2 - 2d_1$  pour  $Sp_4$  et  $2d'_2 - 3d_1$  pour  $G_2$ ). On sait ainsi que  $f^*F = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(x)$  avec  $x \geq 0$ ,  $d \equiv x[2]$  et  $d \geq x$ . Mais alors si on veut une courbe de bidegré  $(d_1, d_2)$  avec  $d_2 \geq d'_2$  quelconque, il suffit de relever  $f$  dans  $G/B$  ce qui est possible car le degré relatif est alors plus grand que  $d$  (et donc plus grand que  $x$ ) et que la parité ne change pas.

**Remarque 8 :** Soit  $C$  un courbe dont la classe dans  $A_1(G/P)$  est dans le cône positif mais pas dans le cône strictement positif. On distingue deux types de points parmi les points définissant  $P$  dans le diagramme de Dynkin, ceux pour lesquels le degré de  $C$  est strictement positif et ceux pour lesquels le degré de  $C$  est nul. On note  $P'$  le parabolique obtenu en prenant les points du deuxième type. On voit que  $P \subset P'$  et on a ainsi un morphisme  $G/P \rightarrow G/P'$ . La courbe  $C$  est tracée dans une fibre de ce morphisme. Si on regarde les sommets du diagramme de Dynkin de  $P$  dans les composantes connexes du diagramme de Dynkin de  $G$  privé de  $P'$ , le produit de variétés homogènes ainsi défini est isomorphe à la fibre. Pour savoir si il existe des courbes lisses, on est ainsi ramené aux cônes strictements positifs de ce produit de variétés homogènes.

## UNE DÉSINGULARISATION DES VARIÉTÉS DE SCHUBERT

On va proposer dans cette partie une application des  $P'$ -orbites définies dans la partie précédente. En s'inspirant en grande partie de la désingularisation des variétés de Schubert donnée par M. Demazure [D], on construit une désingularisation plus fine des variétés de Schubert.

Soit  $B$  un Borel et  $w \in W$ , dans son article [D], M. Demazure construit une suite de paraboliqes  $Q_i$  minimaux (associés à un unique sommet du diagramme) tels que  $wQ_i \subset \overline{BwB}$  (ce qui revient à dire

$\mathfrak{q}_i \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ ),  $Q_1$  contient  $B$ ,  $Q_i \cap Q_{i+1}$  contient un Borel, la suite des  $Q_i \cap B$  est décroissante et  $\sum \mathfrak{q}_i = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$  (on a noté  $B' = w^{-1}Bw$ ). La désingularisation est alors donnée par le quotient par  $B$  de la variété  $X' = Y'/G''$  où  $Y' = \prod_i Q_i$  et  $G'' = \prod_i (Q_i \cap Q_{i+1})$ . Le produit dans  $G$  donne un morphisme de  $Y'$  dans  $\overline{BwB}$  qui est invariant sous  $G''$  et par passage au quotient sous  $B$  on a le morphisme  $D : X' \longrightarrow \overline{BwB}/B$ .

Lorsque  $Y'$  est le produit d'un ou deux groupes, le morphisme de  $X'$  dans  $G$  est bijectif sur son image. Lorsque  $Y'$  a plus de facteurs, le morphisme de  $X'$  dans  $\overline{BwB}$  est seulement birationnel. Plus  $Y'$  a de facteurs, plus le morphisme est susceptible d'avoir des contractions. Ce que l'on va faire ici est réduire, de façon canonique, le nombre de facteurs de  $Y'$ . On va ainsi regrouper les paraboliqes  $Q_i$  pour les remplacer par des paraboliqes plus grand. On cherche donc des paraboliqes  $P_i$  les plus grand possible tels que  $wP_i \subset \overline{BwB}$ ,  $P_1$  contient  $B$ ,  $P_i \cap P_{i+1}$  contient un Borel, la suite des  $P_i \cap B$  est décroissante et  $\sum \mathfrak{p}_i = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ .

Cette consruction nous permettra de donner un critère pour qu'une variété de Schubert soit une  $P''$ -orbite pour un parabolique  $P''$  de  $G$ . On donnera ainsi une condition suffisante (non nécessaire) de lissité des variété de Schubert.

On utilise l'abus de notation suivant : si  $\alpha$  est une racine et  $\mathfrak{p}$  l'algèbre de Lie d'un parabolique, on dit que  $\alpha \in \mathfrak{p}$  si  $\alpha$  est une valeur propre pour l'action du tore  $\mathfrak{h}$  sur  $\mathfrak{p}$  ou encore si  $\mathfrak{g}_\alpha$  apparait dans la décomposition de  $\mathfrak{p}$ . En d'autres termes, on identifie l'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$  et la partie parabolique de  $P$  qui est l'ensemble des racines de  $P$ .

## 1 Construction des paraboliqes

On commence par montrer (lemme 1) qu'il existe un parabolique  $P_1$  contenu dans  $w^{-1}\overline{BwB}$ , contenant  $B$  et qui est maximal pour cette propriété. Ceci nous permet de construire par récurrence une suite de paraboliqes plus gros que ceux de M. Demazure qui donnent la désingularisation annoncée.

**Lemme 1 :** Soient  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{b}'$  deux Borels de  $\mathfrak{g}$  contenant le tore  $\mathfrak{h}$ . Il existe un unique parabolique  $\mathfrak{p}_1$  et un unique parabolique  $\mathfrak{p}'_1$  qui sont maximaux pour les propriétés suivantes :  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$  et  $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{p}'_1 \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ .

*Démonstration :* Il suffit de montrer l'existence et l'unicité de  $\mathfrak{p}_1$ , par symétrie celle de  $\mathfrak{p}'_1$  en découlera. On prend alors pour  $\mathfrak{p}_1$  le parabolique contenant  $\mathfrak{b}$  défini par les opposées des racines simples de  $\mathfrak{b}$  qui sont dant  $-\mathfrak{b}'$ . Vérifions que ce parabolique est contenu dans  $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}'$ . Soit  $\alpha \in \mathfrak{p}$ . Si  $\alpha \in \mathfrak{b}$ , on a terminé. Sinon,  $\alpha$  s'écrit  $\sum(-\alpha_i)$  où  $\alpha_i$  est une racine simple de  $\mathfrak{b}$  telle que  $-\alpha_i \in \mathfrak{b}'$ . Mais alors  $\sum(-\alpha_i) \in \mathfrak{b}'$  donc  $\alpha \in \mathfrak{b}'$ .

Soit maintenant  $\mathfrak{p}_2$  un parabolique vérifiant ces conditions. Soit  $\alpha$  une racine simple de  $\mathfrak{b}$  telle que  $\alpha \in \mathfrak{p}_2$ . Alors,  $-\alpha \in \mathfrak{b}'$  et donc  $-\alpha \in \mathfrak{p}_1$ . Ainsi  $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$ .

Ce lemme permet de construire une suite de paraboliqes qui serviront à la désingularisation. Soient  $B$  et  $B'$  deux Borels. On note  $P_1$  et  $P'_1$  les paraboliqes construits à partir de  $B$  et  $B'$  et du lemme 1. On construit ainsi par récurrence deux suites de Borels  $B_n$  et  $B'_n$  ( $B_1 = B$  et  $B'_1 = B'$ ) et deux suites de paraboliqes  $P_n$  et  $P'_n$  tels que  $B_n$  est contenu dans  $P_{n-1}$  et  $P_n$  et de même  $B'_n$  est contenu dans  $P'_{n-1}$  et  $P'_n$ . En effet, supposons  $B_n, B'_n, P_n$  et  $P'_n$  construits, alors on construit  $B_{n+1}$  (et par symétrie  $B'_{n+1}$ ) de la façon suivante : on décrit les  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$  qui sont dans  $\mathfrak{b}_{n+1}$  : si  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$  est telle que  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$  alors  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1}$ . Si  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$  mais  $-\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  alors  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1}$ . Si  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$  mais  $\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  alors  $\alpha \notin \mathfrak{b}_{n+1}$ . Enfin, si  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  alors  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1} \Leftrightarrow \alpha \in \mathfrak{b}_n$ . Une fois les Borels  $B_{n+1}$  et  $B'_{n+1}$  définis, on définit  $P_{n+1}$  et  $P'_{n+1}$  comme étant les paraboliqes obtenus à partir de  $B_{n+1}$  et  $B'_{n+1}$  et du lemme 1.

Pour le lemme suivant, on a besoin du :

**Fait 1 :** Soit  $\mathfrak{p}$  un parabolique et soient  $\alpha \in \mathfrak{p}$  et  $\alpha' \notin \mathfrak{p}$  deux racines, on a l'implication :

$$\alpha + \alpha' \in \mathfrak{p} \Rightarrow -\alpha \notin \mathfrak{p}$$

*Démonstration :* On va en fait montrer que la première condition implique la condition suivante (qui est équivalente à celle que l'on cherche) :  $\alpha$  appartient à tous les Borels de  $\mathfrak{p}$ .

Soit  $\mathfrak{b}$  un Borel de  $\mathfrak{p}$ ,  $\alpha'$  s'écrit  $\sum(-\alpha'_j)$  où  $\alpha'_j$  est une racine simple de  $\mathfrak{b}$ . Comme  $\alpha' \notin \mathfrak{p}$ , il existe au moins un  $j$  pour lequel  $-\alpha'_j \notin \mathfrak{p}$ . Supposons que  $\alpha \notin \mathfrak{b}$ , alors  $\alpha$  s'écrit  $\sum(-\alpha_i)$  où  $\alpha_i$  est une racine simple de  $\mathfrak{b}$ . Comme  $\alpha \in \mathfrak{p}$ , on a pour tout  $i$  :  $-\alpha_i \in \mathfrak{p}$ . Mais alors  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{p}$  impose que  $\alpha + \alpha'$  s'écrive  $\sum(-\alpha''_k)$ ,

où pour tout  $k$  la racine  $\alpha''_k$  est simple dans  $\mathfrak{b}$  et telle que  $-\alpha''_k \in \mathfrak{p}$ . Mais alors les  $\alpha'_j$  sont contenus dans les  $\alpha''_k$  ce qui impose que pour tout  $j$  on ait  $-\alpha'_j \in \mathfrak{p}$  ce qui est une contradiction.

**Lemme 2 :** Les parties  $\mathfrak{b}_{n+1}$  et  $\mathfrak{b}'_{n+1}$  sont les algèbres de Lie de Borels et on a pour tout  $n$  :  $\mathfrak{b}_{n+1} + \mathfrak{b}'_{n+1} \subset \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$  et  $\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1$ .

*Démonstration :* On commence par montrer que les parties  $\mathfrak{b}_{n+1}$  et  $\mathfrak{b}'_{n+1}$  sont les algèbres de Lie de Borels. Il suffit par symétrie de le faire pour  $\mathfrak{b}_{n+1}$ . On doit donc montrer que  $\mathfrak{b}_{n+1}$  est stable, que pour tout  $\alpha \in \mathfrak{g}$ , l'une des deux racines  $\alpha$  ou  $-\alpha$  est dans  $\mathfrak{b}_{n+1}$  et que l'on a jamais les deux en même temps. On commence par la stabilité. Soit  $\alpha$  et  $\alpha'$  des racines de  $\mathfrak{b}_{n+1}$ .

- Si  $-\alpha$  et  $-\alpha'$  ne sont pas dans  $\mathfrak{p}_{n+1}$ , alors c'est aussi le cas de  $-(\alpha + \alpha')$  et donc  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{b}_{n+1}$ .
- Si  $-\alpha$  n'est pas dans  $\mathfrak{p}_n$  et que l'on a  $\alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha' \in \mathfrak{p}_n$  mais  $-\alpha' \notin \mathfrak{p}'_n$ , alors si  $-(\alpha + \alpha') \in \mathfrak{p}_n$ , on a (Fait 1)  $\alpha' \notin \mathfrak{p}_n$  ce qui est absurde. Donc  $-(\alpha + \alpha') \notin \mathfrak{p}_n$  et donc  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{b}_{n+1}$ .
- Si  $-\alpha$  n'est pas dans  $\mathfrak{p}_n$  et que l'on a  $\alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ , alors de la même façon on doit avoir  $-(\alpha + \alpha') \notin \mathfrak{p}_n$  et donc  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{b}_{n+1}$ .
- Si  $\{\alpha, \alpha'\} \subset \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $\{-\alpha, -\alpha'\} \subset \mathfrak{p}_n$  mais  $-\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$ ,  $-\alpha' \notin \mathfrak{p}'_n$  alors  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ ,  $-(\alpha + \alpha') \in \mathfrak{p}_n$  et  $-(\alpha + \alpha') \notin \mathfrak{p}'_n$  donc  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{b}_{n+1}$ .
- Si  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$  mais  $-\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  et que l'on a  $\alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ , alors  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-(\alpha + \alpha') \in \mathfrak{p}_n$ . Si de plus  $-(\alpha + \alpha') \in \mathfrak{p}'_n$ , on a (Fait 1)  $\alpha' \notin \mathfrak{p}'_n$  ce qui est absurde donc  $-(\alpha + \alpha') \notin \mathfrak{p}'_n$  et donc  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{b}_{n+1}$ .
- Enfin, si  $\{\alpha, \alpha'\} \subset \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ ,  $\{-\alpha, -\alpha'\} \subset \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $\{\alpha, \alpha'\} \subset \mathfrak{b}_n$ , alors  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ ,  $-(\alpha + \alpha') \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{b}_n$  donc  $\alpha + \alpha' \in \mathfrak{b}_{n+1}$ .

Soit maintenant  $\alpha \in \mathfrak{g}$ . Si  $\alpha \notin \mathfrak{p}_n$  alors  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$  et donc  $-\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1}$ . De même si  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$  alors  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$  et donc  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1}$ . Il reste donc les racines  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$  telles que  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$ . On sait que  $\alpha$  ou  $-\alpha$  est dans  $\mathfrak{p}'_n$ , on peut donc supposer (quitter à échanger  $\alpha$  et  $-\alpha$ ) que  $\alpha \in \mathfrak{p}'_n$ . On a alors deux cas :  $-\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  ou  $\alpha \in \mathfrak{p}'_n$ . Dans le premier cas on sait que  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1}$ , dans le second on a  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1} \Leftrightarrow \alpha \in \mathfrak{b}_n$ . Or on sait que  $\mathfrak{b}_n$  est un Borel donc  $\alpha$  ou  $-\alpha$  est dans  $\mathfrak{b}_n$  et ainsi  $\alpha$  ou  $-\alpha$  est dans  $\mathfrak{b}_{n+1}$ . Il reste à voir que l'on a pas  $\alpha$  et  $-\alpha$  dans  $\mathfrak{b}_{n+1}$ . Si c'est le cas on sait que  $\alpha$  et  $-\alpha$  sont dans  $\mathfrak{p}_n$ . Si  $\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  alors  $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  et ceci impose que  $\alpha \notin \mathfrak{b}_{n+1}$  ce qui est absurde. Par symétrie on peut donc supposer que  $\alpha$  et  $-\alpha$  sont dans  $\mathfrak{p}'_n$ , mais alors  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1} \Leftrightarrow \alpha \in \mathfrak{b}_n$  et comme  $\mathfrak{b}_n$  est un Borel on ne peut avoir  $\alpha$  et  $-\alpha$  dans  $\mathfrak{b}_{n+1}$ .

Par construction on sait que  $\mathfrak{b}_{n+1} \subset \mathfrak{p}_n$  et  $\mathfrak{b}'_{n+1} \subset \mathfrak{p}_n$  ce qui nous donne que  $\mathfrak{b}_{n+1} + \mathfrak{b}'_{n+1} \subset \mathfrak{p}_n + \mathfrak{p}'_n = \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$ .

On procède par récurrence en supposant que  $\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1$  cette propriété étant évidemment vraie pour  $n = 1$ . On a  $\mathfrak{b}'_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1 \subset (\mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n) \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1$  par hypothèse de récurrence.

De même, on a  $\mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1$ . Soit alors  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1$ . On sait alors que  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{b}'_n \subset \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et on a les cas suivants :

- $-\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  alors  $\alpha$  est dans tous les Borels de  $\mathfrak{p}'_n$  et donc  $\alpha \in \mathfrak{b}'_{n+1}$ .
- $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  mais  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$  alors  $-\alpha \in \mathfrak{b}'_n$  (sinon  $-\alpha \notin \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$  alors que  $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$ ) et donc  $\alpha \notin \mathfrak{b}'_n$  et ce cas ne se produit pas.

- $-\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  alors on a  $\alpha \in \mathfrak{b}'_n$  et donc  $\alpha \in \mathfrak{b}'_{n+1}$ .

On conclue ainsi que  $\mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1$ .

On sait que  $\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1$ . Soit  $\alpha \in \mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1$ . Si  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$  alors  $\alpha$  est dans tous les Borels de  $\mathfrak{p}_n$  et donc  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1}$ . Supposons  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$ . Comme  $\alpha \in \mathfrak{b}'_n$  alors  $\alpha \in \mathfrak{p}'_n$ . Mais alors on a les deux cas suivants :

- $-\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  alors  $-\alpha \in \mathfrak{b}_n$  (sinon  $-\alpha \notin \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$  alors que  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$ ) ce qui impose  $\alpha \notin \mathfrak{b}_n$  et ce cas est exclu.

- $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  et on a  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  donc comme  $\alpha \in \mathfrak{b}_n$  on a  $\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1}$ .

On conclue ainsi que  $\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1$ .

On a ainsi construit deux suites de Borels et deux suites de paraboliques. On s'arrête dès que  $P_n \cap P'_n$  contient un Borel (il est nécessaire d'avoir cette propriété pour que le morphisme  $\pi$  que l'on construit dans la suite et qui est la désingularisation soit propre). On a le lemme suivant qui nous permet de dire que notre construction s'arrête.

**Lemme 3 :** Si  $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  ne contient pas de Borel alors l'inclusion  $\mathfrak{b}_{n+1} + \mathfrak{b}'_{n+1} \subset \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$  est stricte.

*Démonstration :* Supposons que  $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  ne contient pas de Borel et que  $\mathfrak{b}_{n+1} + \mathfrak{b}'_{n+1} = \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$ . Si il existe  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$  telle que  $\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  et que  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  alors  $\alpha \in \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_{n+1}$  donc  $\alpha \notin \mathfrak{b}_{n+1} + \mathfrak{b}'_{n+1}$  ce qui est impossible. De même si il existe  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  telle que  $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  mais  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$

alors  $-\alpha \in \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$  et  $-\alpha \notin \mathfrak{b}_{n+1} + \mathfrak{b}'_{n+1}$  ce qui est impossible. Les racines de  $\mathfrak{b}_n$  sont donc d'un des trois types suivants :  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  ou  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$ ,  $\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$ ,  $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$  ou  $\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n + \mathfrak{p}'_n$ .

Soit maintenant  $\mathfrak{b}$  un Borel de  $\mathfrak{p}_n$  tel que  $\text{Card}(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n)$  est maximal (ici on appelle  $\text{Card}(\mathfrak{p})$  le nombre de racines qui apparaissent dans  $\mathfrak{p}$ ). Alors il existe une racine simple  $\alpha$  de  $\mathfrak{b}$  telle que  $\alpha \notin \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  (pour  $\alpha$  c'est clair sinon  $\mathfrak{b}$  serait contenu dans  $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ , si  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ , alors  $s_\alpha(\mathfrak{b})$  est un Borel de  $\mathfrak{p}_n$  tel que  $s_\alpha(\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n = (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n) \cup \{-\alpha\}$  ce qui contredit la maximalité). On sait alors que  $\alpha \in \mathfrak{p}_n$  mais  $\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  mais  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$ . On montre maintenant que  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$  ce qui sera une contradiction. Pour cela il suffit de montrer que pour tout  $\beta \in \mathfrak{b}_n$  on a  $\beta - \alpha \in \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$ . Mais la remarque faite au debut nous permet de dire que l'on les trois cas suivants :

- $\beta \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\beta \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ , alors  $\beta \in \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  donc  $\beta - \alpha \in \mathfrak{p}'_n \subset \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$ .
- $\beta \in \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\beta \notin \mathfrak{p}_n + \mathfrak{p}'_n$ , alors  $\beta \in \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \in \mathfrak{p}'_n$  donc  $\beta - \alpha \in \mathfrak{p}'_n \subset \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$ .
- $\beta \in \mathfrak{p}_n$  mais  $\beta \notin \mathfrak{p}'_n$  et  $-\beta \in \mathfrak{p}'_n$  mais  $-\beta \notin \mathfrak{p}_n$ , alors  $\beta$  est dans tous les Borels de  $\mathfrak{p}_n$  et en particulier dans  $\mathfrak{b}$ . On peut donc écrire  $\beta = \sum \alpha_i$  où les  $\alpha_i$  sont des racines simples de  $\mathfrak{b}$ . Mais alors  $\beta - \alpha = \sum \alpha_i - \alpha$  est une racine de  $\mathfrak{g}$  si et seulement si  $\alpha \in \{\alpha_i\}$  (car  $\alpha$  est une racine simple) et donc  $\beta - \alpha \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$ .

## 2 La désingularisation

Soient  $P$  et  $P'$  deux paraboliques contenant un même Borel et soit  $w \in W$ . On peut maintenant construire la désingularisation de la variété  $\overline{P'wP/P}$  qui est l'adhérence de la  $P'$ -orbite  $P'wP/P$  dans  $G/P$ . Le lemme 1 de la partie précédente nous permet de construire un Borel  $B \subset P$  et  $w' \in \overline{w}$  tels que  $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$  ( $\mathfrak{b}' = w'(\mathfrak{b})$ ). On peut donc se contenter de construire la suite de paraboliques pour  $B$  et  $w'$ . La désingularisation de  $\overline{P'wP/P}$  sera alors le quotient de celle de  $\overline{Bw'B/B}$  par  $P$ . Ce sera une fibration en  $P/B$ . On note  $B' = w'(B)$ . Pour cette construction, on s'inspire directement de celle de Demazure [D]. Les lemmes précédents nous ont permis de construire des suites de paraboliques et de Borels. De plus le lemme 3 nous permet de dire qu'à partir d'un certain rang  $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  contiendra un Borel : tant que ce n'est pas le cas la suite des  $\mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n$  est strictement décroissante (en dimension) et sera donc constante à partir d'un certain rang.

On note  $P_i$ ,  $P'_i$ ,  $B_i$  et  $B'_i$  les paraboliques associés aux algèbres de Lies  $\mathfrak{p}_i$ ,  $\mathfrak{p}'_i$ ,  $\mathfrak{b}_i$  et  $\mathfrak{b}'_i$ . On construit la variété suivante :  $X = P'_1 \times^{P'_1 \cap P'_2} P'_2 \cdots P_2 \times^{P_1 \cap P_2} P_1$  qui est le quotient de  $Y = P'_1 \times P'_2 \cdots P_2 \times P_1$  par  $G' = (P'_1 \cap P'_2) \times \cdots \times (P_1 \cap P_2)$ . On a un morphisme de  $Y$  vers  $G$  donné par le produit (et par multiplication par  $w'$  pour arriver dans  $\overline{Bw'B}$ ) qui est invariant sous l'action de  $G'$  ce qui nous donne un morphisme de  $X$  dans  $G$ . On voit alors que  $B$  (et même  $P$ ) agit à droite sur ces variétés et on obtient ainsi un morphisme  $\pi$  de  $X/B$  (ou  $X/P$ ) vers  $G/B$  (ou  $G/P$ ).

On va comparer cette construction avec celle donnée par M. Demazure dans [D] : on a, pour former  $P_1$ , regroupé les paraboliques que choisit M. Demazure. On voit ainsi que  $\pi$  factorise la désingularisation de Demazure (cf. proposition 1).

L'image de  $\pi$  est l'adhérence de la cellule  $BwB/B$  et  $X/B$  est le quotient de  $P'_1 \times P'_2 \cdots \times P_2 \times P_1/B$  par  $G'$  et est donc lisse. On peut aussi le voir en considérant la filtration suivante :

$$X/B \longrightarrow P'_1 \times^{P'_1 \cap P'_2} P'_2 \times \cdots \times P_2/(P_1 \cap P_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_1 \times^{P'_1 \cap P'_2} P'_2/(P'_2 \cap P'_3) \longrightarrow P'_1/(P'_1 \cap P'_2)$$

où la première flèche est une fibration en  $P_1/B$ , la seconde en  $P_2/(P_1 \cap P_2)$  et ainsi de suite chacune des flèches est un fibration en  $P_{n+1}/(P_n \cap P_{n+1})$  ou en  $P'_n/(P'_n \cap P'_{n+1})$ . Ce qui prouve que  $X/P$  est lisse.

**Remarque 1 :** On va voir que cette désingularisation est plus fine que celle de [D] : la désingularisation de Demazure se factorise par  $\pi$ . Notre désingularisation est alors un isomorphisme sur un ouvert plus grand. En fait notre désingularisation est bijective sur tout l'ouvert  $w'P'_1B/B$  qui contient  $w'B'B/B = Bw'B/B$ .

**Exemple 1 :** Si  $Bw'B/B$  est la cellule maximale de  $G/B$  alors ceci signifie que  $\mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{g}$  et donc  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{g}$ . Ainsi notre désingularisation est  $G/B$  (qui était déjà lisse) alors que celle de [D] était plus compliquée et notamment pas un isomorphisme.

Pour montrer la factorisation annoncée, on construit des paraboliques *minimaux* contenus dans les  $P_i$  et qui redonne la désingularisation de M. Demazure.

**Lemme 4 :** Soit  $n$  le plus petit entier tel que  $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  contienne un Borel. Il existe  $\mathfrak{b}_{n+1}$  un Borel de  $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  tel que  $\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1$ .

*Démonstration :* On modifie  $\mathfrak{b}_n$  pour le faire appartenir à  $\mathfrak{p}'_n$  : si  $\mathfrak{b}_n \subset \mathfrak{p}'_n$ , on pose  $\mathfrak{b}_{n+1} = \mathfrak{b}_n$ . Sinon, il existe  $\alpha$  racine simple de  $\mathfrak{b}_n$  telle que  $\alpha \notin \mathfrak{p}'_n$  mais  $-\alpha \in \mathfrak{p}_n$ . En effet, soit  $\alpha$  une racine simple de  $\mathfrak{b}_n$  qui n'est pas dans  $\mathfrak{p}'_n$  (qui existe car  $\mathfrak{b}_n \not\subset \mathfrak{p}'_n$ ), alors si  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n$ , on a  $\alpha \notin \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  et  $-\alpha \notin \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  ce qui contredit le fait que  $\mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$  contient un Borel. On regarde alors  $s_\alpha(\mathfrak{b}_n)$ . On a  $s_\alpha(\mathfrak{b}_n) \subset \mathfrak{p}_n$  et  $s_\alpha(\mathfrak{b}_n) \cap \mathfrak{p}'_n = (\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{p}'_n) \cup \{-\alpha\}$ . De plus, si  $\alpha \in \mathfrak{b}'_1$ , alors  $\alpha \in \mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{p}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{p}'_n$  ce qui est absurde. Donc  $\alpha \notin \mathfrak{b}'_1$  et  $s_\alpha(\mathfrak{b}_n) \cap \mathfrak{b}'_1 = (\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1) \cup \{-\alpha\}$ . On continue ce processus tant que le Borel n'est pas contenu dans  $\mathfrak{p}'_n$ . On obtient ainsi le Borel  $\mathfrak{b}_{n+1}$  qui vérifie  $\mathfrak{b}_{n+1} \subset \mathfrak{p}_n \cap \mathfrak{p}'_n$ ,  $\mathfrak{b}_n \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1$ . Enfin,  $\mathfrak{b}_{n+1} \cap \mathfrak{b}'_1 \subset (\mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}'_n) \cap \mathfrak{b}'_1 \subset \mathfrak{b}'_n \cap \mathfrak{b}'_1$ .

**Proposition 1 :** Soit  $S$  une variété de Schubert, il existe une désingularisation de Demazure  $D : X' \longrightarrow S$  et un morphisme  $X' \longrightarrow X$  qui s'insère dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{D} & S \\ \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ X & \xrightarrow{\pi} & S \end{array}$$

*Démonstration :* On commence par le lemme suivant :

**Lemme 5 :** Soit  $\mathfrak{p}$  un parabolique,  $\mathfrak{b}$  un Borel,  $\mathfrak{b}'$  et  $\mathfrak{b}''$  des Borels de  $\mathfrak{p}$  tels que  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}''$ , alors il existe une suite de Borels  $(\mathfrak{b}_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $\mathfrak{p}$  tels que  $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}'$ ,  $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}''$ ,  $\mathfrak{b}_i \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b}_{i+1} \cap \mathfrak{b}$  et  $\text{Card}(\mathfrak{b}_{i+1} \cap \mathfrak{b}) = \text{Card}(\mathfrak{b}_i \cap \mathfrak{b}) + 1$ .

*Démonstration :* On peut se placer dans le cas où l'inclusion  $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}''$  est stricte. Alors il existe  $\alpha$  une racine simple de  $\mathfrak{b}'$  telle que  $-\alpha \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}''$ . En effet, sinon toutes les racines simples de  $\mathfrak{b}'$  sont telles que  $-\alpha \notin \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}''$  c'est à dire  $\alpha \in \mathfrak{b}$  ou  $\alpha \in \mathfrak{b}''$ . Mais si  $\alpha \in \mathfrak{b}$  alors  $\alpha \in \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}''$  et donc dans tous les cas  $\alpha \in \mathfrak{b}''$ . Ceci impose que  $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}''$  et donc  $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}''$  ce qui est impossible en raison de l'inclusion stricte.

On pose alors  $\mathfrak{b}_2 = s_\alpha(\mathfrak{b}')$  et on a  $(-\alpha \in \mathfrak{b}'' \text{ donc } -\alpha \in \mathfrak{p})$   $\mathfrak{b}_2 \subset \mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{b}_2 \cap \mathfrak{b} = (\mathfrak{b}' \cap \mathfrak{b}) \cup \{-\alpha\} \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}''$ . On recommence le processus tant que l'inclusion de  $\mathfrak{b}_i \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{b} \cap \mathfrak{b}''$  est stricte.

Ce lemme nous permet de construire pour tout  $1 \leq k \leq n$  deux suites de Borels  $(\mathfrak{b}_{k,i})_{1 \leq i \leq r'_k}$  (resp.  $(\mathfrak{b}'_{k,i})_{1 \leq i \leq r'_k}$ ) de  $\mathfrak{p}_i$  (resp.  $\mathfrak{p}'_i$ ) tels que les  $\mathfrak{b}_{k,i} \cap \mathfrak{b}'_1$  (resp.  $\mathfrak{b}'_{k,i} \cap \mathfrak{b}'_1$ ) forment une suite croissante (resp. décroissante) pour l'ordre lexicographique et que leur dimension augmente (resp. diminue) de exactement 1 à chaque. De même le lemme 5 nous permet de construire deux suites de Borels  $(\mathfrak{b}_{n+1,i})_{1 \leq i \leq r'_{n+1}}$  de  $\mathfrak{p}_n$  (entre  $\mathfrak{b}_n$  et  $\mathfrak{b}_{n+1}$ ) et  $(\mathfrak{b}'_{n+1,i})_{1 \leq i \leq r'_{n+1}}$  de  $\mathfrak{p}'_n$  (entre  $\mathfrak{b}_{n+1}$  et  $\mathfrak{b}'_n$ ) telles que les dimensions de leurs intersections avec  $\mathfrak{b}'_1$  forment une suite croissante pour la première et décroissante pour la seconde. Ces deux suites complètent les deux premières suites en une seule qui est telle que les intersections avec  $\mathfrak{b}'_1$  forment une suite dont les dimensions prennent une seule fois toutes les valeurs entre  $\dim(\mathfrak{b}'_1)$  et  $\dim(\mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}'_1)$ . Cette suite de Borels nous permet de construire une désingularisation de Demazure correspondant à  $\mathfrak{b}_1$  et  $\mathfrak{b}'_1$  en prenant, si  $\mathfrak{b}_x$  et  $\mathfrak{b}_y$  sont deux termes consécutifs de la suite le parabolique  $\mathfrak{b}_x + \mathfrak{b}_y$  qui est minimal mais différent d'un Borel. On construit ainsi pour tout  $1 \leq k \leq n+1$  et tout  $1 \leq i \leq r_k - 1$  les paraboliques  $\mathfrak{p}_{k,i} = \mathfrak{b}_{k,i} + \mathfrak{b}_{k,i+1}$ , pour tout  $1 \leq k \leq n$  les paraboliques  $\mathfrak{p}_{k,r_k} = \mathfrak{b}_{k,r_k} + \mathfrak{b}_{k+1,1}$  et le parabolique  $\mathfrak{p}_{n+1,r_{n+1}} = \mathfrak{b}_{n+1,r_{n+1}} + \mathfrak{b}'_{n+1,r'_{n+1}}$  et de même pour tout  $1 \leq k \leq n+1$  et tout  $1 \leq i \leq r'_k - 1$  les paraboliques  $\mathfrak{p}'_{k,i} = \mathfrak{b}'_{k,i} + \mathfrak{b}'_{k,i+1}$  et pour tout  $1 \leq k \leq n$  les paraboliques  $\mathfrak{p}'_{k,r'_k} = \mathfrak{b}'_{k,r'_k} + \mathfrak{b}'_{k+1,1}$ . On pose alors  $Y' = \prod P'_{k,i} \times \prod P_{k,i}$  le premier produit est effectué dans l'ordre lexicographique et le second dans l'ordre lexicographique inversé, on pose  $G'' = \prod B'_{k,i} \times \prod B_{k,i}$  (avec les mêmes ordres) et on pose  $X' = Y'/G''$ . La désingularisation de Demazure de  $\overline{B'_1 B_1/B_1}$  est alors donnée par  $X'/B_1$  et un morphisme  $D$  de cette variété vers  $G/B_1$ . Le morphisme  $D$  est obtenu à partir de la multiplication de  $Y'$  dans  $G$ . Or cette multiplication se factorise par  $Y$  car les groupes  $P_{k,i}$  sont contenus dans  $P_k$  et par passage au quotient on voit que  $D$  se factorise par  $\pi$ .

**Corollaire 1 :** Le morphisme  $\pi$  est une désingularisation

*Démonstration :* On commence par montrer le cas des variétés de Schubert :  $\overline{Bw'B/B}$  est exactement  $\overline{w'P'_1 B/B}$ . On obtient de cette façon un ouvert (la  $P'_1$ -orbite  $w'P'_1 B/B$ ) lisse plus grand que la cellule de Schubert. Le morphisme  $\pi$  est un isomorphisme au dessus de cet ouvert. En effet, cet ouvert contient la



cellule  $Bw'B/B$  au dessus de laquelle la désingularisation de Demazure est un isomorphisme donc  $\pi$  est aussi un isomorphisme au dessus de cette cellule. De plus, le morphisme  $\pi$  est invariant sous l'action de  $P_1$  donc l'orbite de la cellule lisse précédente (c'est exactement  $w'P'_1B/B$ ) est une  $P'_1$ -orbite lisse et  $\pi$  est encore un isomorphisme au dessus de cette orbite.

Pour le cas général on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X/B & \longrightarrow & \overline{Bw'B/B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/P & \longrightarrow & \overline{w'P'_1P/P} \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des fibrations en  $P/B$  (pour la seconde ceci vient du fait que comme  $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{b} + \mathfrak{b}' = \mathfrak{p} + \mathfrak{p}'$ , la variété  $\overline{Bw'B/B}$  est l'image réciproque de  $\overline{w'P'_1B/B}$  par le morphisme de  $G/B \rightarrow G/P_1$ ) ainsi comme le morphisme  $\pi$  pour les Borels est une désingularisation et est donc birationnel, alors le morphisme  $\pi$  de  $X/P$  vers la variété de Schubert correspondante est birationnel et c'est bien une désingularisation.

**Remarque 2 :** La  $P'_1$ -orbite  $w'P'_1B/B$  est le plus grand ouvert lisse de  $\overline{Bw'B/B}$  qui est une orbite sous l'action d'un sous groupe de  $G$  laissant stable  $\overline{Bw'B/B}$  (ceci vient du fait que  $\mathfrak{p}'_1$  a été choisit maximal pour sa propriété). Par ailleurs, pour tout groupe  $P$  contenant  $B$  et contenu dans  $P_1$ , le morphisme  $\overline{Bw'P/P} \rightarrow \overline{Bw'P_1/P_1}$  est une fibration en  $P_1/P$ . Ainsi, les singularités des variétés  $\overline{Bw'P/P}$  pour de tels  $P$  sont identiques à celle de  $\overline{Bw'P_1/P_1}$ . Les variétés de Schubert du type de  $\overline{Bw'P_1/P_1}$  seront dits minimales : il n'existe pas de parabolique  $P$  contenant  $P_1$  tel que la flèche  $\overline{Bw'P_1/P_1} \rightarrow \overline{Bw'P/P}$  est une fibration en  $P/P_1$ .

Notre construction nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété de Schubert minimale soit homogène sous l'action d'un sous groupe de  $G$  et on en déduit une condition suffisante de lissité des variété de Schubert. Notons  $S$  la variété de Schubert  $\overline{Bw'P/P}$  et  $S_1$  la variété de Schubert minimale associée  $\overline{Bw'P_1/P_1}$  on a alors le :

**Corollaire 2 :** La variété de Schubert minimale  $S_1$  est homogène sous l'action d'un sous groupe de  $G$  si et seulement si  $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}'_1$  contient un Borel. Dans ce cas  $S$  est lisse.

*Démonstration :* Si  $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}'_1$  contient un Borel on a  $X = P'_1 \times^{P'_1 \cap P_1} P_1$ . Si on quotiente par  $P_1$  qui contient  $P$  on a alors  $P'_1/(P'_1 \cap P_1) = X/P_1 \rightarrow S_1$  est la désingularisation de  $S_1$  qui était donc homogène. Mais alors le morphisme  $G/P \rightarrow G/P_1$  nous donne le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X/P & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/P_1 & \longrightarrow & S_1 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont des fibrations en  $P_1/P$  et donc, comme la flèche du bas est un isomorphisme, celle du haut est également un isomorphisme. Ainsi on voit que  $S$  est lisse car  $X/P$  l'est.

Réciproquement, si  $S_1$  est homogène sous l'action d'un sous groupe de  $G$  alors le plus grand de ces sous groupes est  $P'_1$  par construction. Mais alors  $P'_1/(P'_1 \cap P_1)$  doit être  $S_1$  toute entière. Ceci signifie que la cellule  $P'_1/(P'_1 \cap P_1)$  est propre. Ceci n'est possible que si  $P'_1 \cap P_1$  contient un Borel. Remarquons que pour que  $S$  soit homogène sous  $P'_1$ , il faut et il suffit que  $\P \cap P'_1$  contienne un Borel.

**Exemple 2 :** On étudie notre désingularisation pour certaines variétés de Schubert de  $SL_4$ . Soit  $P_0 \in L_0 \subset H_0$  un drapeau de  $\mathbf{P}^3$ . Considérons les variétés de Schubert suivantes :  $S = \{(P, L, H) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{G} \times \check{\mathbf{P}}^3/P \in L \subset H \text{ et } \dim(L \cap L_0) \geq 1\}$ ,  $S' = \{(P, L, H) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{G} \times \check{\mathbf{P}}^3/P \in L \subset H, P \in L_0 \text{ et } L \subset H_0\}$  et  $S'' = \{(P, L, H) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{G} \times \check{\mathbf{P}}^3/P \in L \subset H, P \in H_0 \text{ et } P_0 \in H\}$ , cette dernière est la seule variété de Schubert de  $SL_4$  qui ne correspond pas à une permutation vexillaire. Notre désingularisation est alors donnée dans chacun des cas par  $X = \{(P, P', L, H, H') \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 \times \mathbf{G} \times \check{\mathbf{P}}^3 \times \check{\mathbf{P}}^3/P \in L \subset H, P' \in L \subset H' \text{ et } \P \in L_0 \subset H'\}$ ,  $X' = S'$  et  $X'' = \{(P, L, L', H) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{G} \times \mathbf{G} \times \check{\mathbf{P}}^3/P \in L \subset H, P \in L' \subset H \text{ et } P_0 \in L' \subset H_0\}$ . Ces désingularisations sont toutes bijectives sur le lieu lisse. Notons que l'exemple de  $S'$  montre que la condition suffisante de lissité du corollaire 2 n'est pas nécessaire.

**Remarque 3 :** Si le lieu lisse d'une variété de Schubert  $S$  est homogène sous l'action d'un sous groupe de  $G$  alors ce sous groupe est  $P_1$  et notre désingularisation est bijective sur le lieu lisse. Par ailleurs, on

peut vérifier que si le groupe  $G$  est  $SL_n$  pour  $n \leq 4$ ,  $SO_n$  pour  $n \leq 6$  ou  $Sp_n$  pour  $n \leq 4$  alors notre désingularisation est bijective sur le lieu lisse.

On peut encore affiner notre désingularisation de la façon suivante : on remplace les paraboliques  $P_i$  par un parabolique contenant  $P_i$  et contenu dans  $w^{-1}\overline{BwB}$ . Ceci ne change pas les paraboliques  $P_1$  et  $P'_1$ . Cette technique permet ainsi de construire les désingularisations  $X_1 = \{(P, P', L, H) \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{P}^3 \times \mathbf{G} \times \check{\mathbf{P}}^3 / P \in L \subset H, P' \in L \text{ et } P' \in L_0\}$  et  $X_2 = \{(P, L, H, H') \in \mathbf{P}^3 \times \mathbf{G} \times \mathbf{P}^3 \times \check{\mathbf{P}}^3 / P \in L \subset H, L \subset H' \text{ et } L_0 \subset H'\}$  de la variété de Schubert  $S$  de l'exemple 2. On voit que cette construction n'est plus canonique, il faut choisir un parabolique contenant  $P_i$  et contenu dans  $w^{-1}\overline{BwB}$ .

**Remerciements :** Je tiens ici à remercier mon directeur de thèse Laurent Gruson pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail et également Patrick Polo pour m'avoir signaler une erreur dans une première version de cet article.

## Références

- [ACGH] Arbarello E. Cornalba M. Griffiths P.A. Harris J. : Geometry of algebraic curves I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 267, Springer Verlag, NewYork Berlin (1985).
- [B] Ballico E. : On the Hilbert scheme of curves in a smooth quadric, Deformations of mathematical structures Łódź/Lublin (1985/87) Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, 1989.
- [BGG] Bernstein I.N. Gel'fand I.M. Gel'fand S.I. : Schubert cells, and cohomology of the spaces  $G/P$ , Uspehi Mat. Nauk.(3) 68 (1973).
- [Bo] Borel A. : Linear algebraic groups, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York (1991).
- [D] Demazure M. : Désingularisation des variétés de Schubert généralisées, Ann. Sci. ENS (4) 7 (1974).
- [DG] Demazure M. Gabriel P : Groupes algébriques, Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs. Masson & Cie, Editeur, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1970).
- [FH] Fulton W. Harris J. : Representation theory, GTM 129 Springer Verlag, New-York (1991).
- [Har] Harris J. : The genus of space curves, Math. Ann. 249 (1980) no. 3.
- [K1] Kempf G.R. : Vanishing theorems for flag manifolds, Amer. j. math. 98 (1976).
- [K2] Kempf G.R. : Linear systems, Ann. of Math. 103 (1976).
- [Kl] Kleiman S.L. : The transversality of a general translate, Compositio Math. 28 (1974).
- [Ko] Kollár J. : Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 32, Springer Verlag, Berlin (1996).
- [KP] Kim B., Pandharipande R. : The connectedness of the moduli space of maps to homogeneous spaces, preprint AG 0003168.
- [LMS] Lakshmibai V., Musili C., Seshadri C.S. : Cohomology of line bundles on  $G/B$ , Ann. Sci. ENS (4) 7 (1974).
- [T] Thomsen J.F. : Irreducibility of  $\overline{M}_{0,n}(G/P, \beta)$ , Internat. J. Math. 9 (1998) No. 3.